数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(3):283–300
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0019

一类具有粘性项的拟线性抛物型方程组 *

叶耀军[1] 李兰兰[1]

提要 研究了一类具有非线性源项和粘性项的拟线性抛物型方程组的初边值问题. 通过构造稳定集，证明了此问题整体解的存在性，并建立了解的长时间行为. 同时在放松函数的适当假设条件下，得到了初始能量非负时解的爆破性质及解的生命区间估计.

关键词 拟线性抛物型方程组，粘性项，整体解，爆破，生命区间估计
MR (2000) 主题分类 35K40, 35K45, 35K50, 35K55, 35K65
中图法分类 O175.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)03-0283-18

§1 引 言

本文研究下列拟线性抛物型方程组的初边值问题

$$A_1(t)|u_t|^{r_1-2}u_t-\Delta u+\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s=f_1(u,v),\quad (x,t)\in\Omega\times R^+,\tag{1.1}$$

$$A_2(t)|v_t|^{r_2-2}v_t-\Delta v+\int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)\mathrm{d}s=f_2(u,v),\quad (x,t)\in\Omega\times R^+,\tag{1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{1.3}$$

$$u(x,t)=v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R^+,\tag{1.4}$$

其中 $r_i\geqslant 2\ (i=1,2)$, $R^+\equiv[0,+\infty)$, $\Omega\subset R^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域； $A_i(t)\ (i=1,2)$ 是有界方阵，并满足下面的条件：

$$c_i|\omega|^2\leqslant(A_i(t)\omega,\omega)\leqslant d_i|\omega|^2,\quad t\in R^+,\ \omega\in R^n,\tag{1.5}$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 R^n 空间中的内积， c_i, $d_i(i=1,2)$ 是正常数；函数 $g_i(\cdot):R^+\to R^+$ 和 $f_i(\cdot,\cdot):R^n\times R^n\to R^n\ (i=1,2)$ 由第二节中的假设 (H1) 和 (H2) 确定.

考虑单个拟线性抛物型方程的初边值问题：

$$\begin{cases}A(t)|u_t|^{m-2}u_t-\Delta u+\displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s=|u|^{p-2}u,\quad (x,t)\in\Omega\times R^+,\\ u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,\\ u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R^+.\end{cases}\tag{1.6}$$

本文 2021 年 1 月 16 日收到， 2022 年 1 月 24 日收到修改稿.
[1]浙江科技学院理学院数学与统计系，杭州 310023. E-mail: yjye2013@163.com; lc19951102l@163.com
*本文受到浙江省自然科学基金 (No. LY17A010009) 的资助.

(1.6) 中的方程来源于工程和物理科学中的各种数学模型. 比如, 在研究记忆材料的热传导时, 经典的傅立叶热通量定律可由以下形式替代 (见 [1]):

$$q = -d\nabla u - \int_{-\infty}^{t} \nabla[k(x,t)u(x,\tau)]\mathrm{d}\tau, \tag{1.7}$$

其中 u 是温度, d 是扩散系数, 积分项表示材料中的记忆效应. 这类方程的研究已有许多结果, 参见文 [1–7]. 从数学的角度来看, 我们期望积分项被方程中的主要项所控制. 因此, 抛物型方程的理论可用于这类方程.

在函数 $g(\cdot)$ 和参数 m, p 的适当假设条件下, Liu 和 Chen[8] 得到了整体解的一般衰减估计及初始能量为正或者为负时解的爆破性质. 当 $m = 2$, $A(t)$ 是一个单位矩阵时, Messaoudi[4] 考虑了初边值问题 (1.6), 并在 $g(\cdot)$ 和 p 适当的假设条件下, 证明了正初始能量解的爆破结果.

在 $g(\cdot) = 0$ 的情况下, Pucci 和 Serrin[9] 讨论了如下拟线性抛物型方程:

$$A(t)|u_t|^{m-2}u_t = \Delta u - f(x,u), \tag{1.8}$$

其中 $m > 2$, f 满足 $(f(x,u),u) \geqslant 0$. 他们建立了方程 (1.8) 初边值问题整体解的存在性及 $t \to +\infty$ 时解的稳定性, 但是没有给出衰减率. 之后, Berrimi 和 Messaoudi[10] 证明了如下结果: 对于适当的初值条件, $m = 2$ 时, 问题 (1.6) 的解呈指数衰减, $m > 2$ 时, 解呈多项式衰减.

当 (1.6) 中的方程不含源项时, Messaoudi 和 Tellab[5] 得到了问题 (1.6) 整体解的一般衰减结果. 之前所建立的指数和多项式衰减结果只是它的特殊情况.

当问题 (1.1)–(1.4) 中不含记忆项 (即 $g_i(\cdot) = 0, i = 1,2$) 时, Escobedo 和 Herrero[11] 研究了以下弱耦合二阶抛物方程组的柯西问题:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p, \quad (x,t) \in R^+ \times R^n, \\ v_t - \Delta v = u^q, \quad (x,t) \in R^+ \times R^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0, \quad x \in R^n, \end{cases}$$

其中 $p, q \geqslant 1$, $pq > 1$, 并得到了下列结果: $\frac{n}{2} > \max\left\{\frac{1+p}{pq-1}, \frac{1+q}{pq-1}\right\}$ 时, 小初值解整体存在; $\frac{n}{2} \leqslant \max\left\{\frac{1+p}{pq-1}, \frac{1+q}{pq-1}\right\}$ 时, 任一个非平凡解在有限时间内发生爆破. 之后, Escobedo 和 Levine[12] 把上述结果推广到方程组:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^\alpha v^p, \quad (x,t) \in R^+ \times R^n, \\ v_t - \Delta v = u^q v^\beta, \quad (x,t) \in R^+ \times R^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0,\ x \in R^n. \end{cases}$$

基于以上研究, 本文应用文 [13–14] 引入的位势井理论证明了问题 (1.1)–(1.4) 整体解的存在性. 同时建立了整体解的衰减估计, 并得到了正初始能量解的爆破性质及解的生命区间估计.

为使用简便起见，本文用 $\|\cdot\|_s$ 表示 Lebesgue 空间 $L^s(\Omega)$ 的范数， $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 的范数，用等价范数 $\|\nabla\cdot\|$ 替代空间 $H_0^1(\Omega)$ 范数 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$. 此外， $C_i>0$ $(i=0,1,2,\cdots)$ 表示依赖于已知常数的常数.

§2　预备知识

对于函数 $g_i(s)$ 和 $f_i(u,v)$, $i=1,2$, 作如下假设：

(H1) $g_i(s): R^+\to R^+$ 属于 $C^1(R^+)$, 并满足

$$g_i(s)\geqslant 0,\quad g_i'(s)\leqslant 0,\quad i=1,2,\ \forall s\geqslant 0$$

及

$$1-\int_0^{+\infty} g_i(s)\mathrm{d}s=l_i>0,\quad l=\min\{l_1,l_2\},\ i=1,2.$$

此外，存在正常数 η_i 和 ξ_i, 使得

$$-\eta_i g_i(t)\leqslant g_i'(t)\leqslant -\xi_i g_i(t),\quad i=1,2.$$

(H2) 存在非负函数 $F(u,v)\geqslant 0$ 及常数 $C_0,C_1>0$, 满足

$$\frac{\partial F}{\partial u}=f_1(u,v),\quad \frac{\partial F}{\partial v}=f_2(u,v)$$

及

$$C_0(|u|^{2p}+|v|^{2p})\leqslant uf_1(u,v)+vf_2(u,v)=2pF(u,v)\leqslant C_1(|u|^{2p}+|v|^{2p}),$$

其中

$$f_1(u,v)=a(|u+v|^{2(p-1)}(u+v)+|u|^{p-2}u|v|^p),\quad \forall (u,v)\in R^n\times R^n,$$
$$f_2(u,v)=a(|u+v|^{2(p-1)}(u+v)+|u|^p|v|^{p-2}v),\quad \forall (u,v)\in R^n\times R^n,$$
$$F(u,v)=\frac{a}{2p}(|u+v|^{2p}+|uv|^p).$$

这里 $a>0$ 是常数.

(H3) 参数 p,r_i 满足下列条件：

$$1<p\leqslant\frac{n-1}{n-2},\ n\geqslant 3;\quad 1<p<+\infty,\ n=1,2.$$
$$2<r_i\leqslant\frac{2n}{n-2},\ n\geqslant 3;\quad 2<r_i<+\infty,\ n=1,2;\ i=1,2.$$

为了研究主要结果，引入泛函

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t)&=\mathcal{J}[u(t),v(t)]\\&=\frac12\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\frac12\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+\frac12[(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)]-\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(t)&=\mathcal{K}[u(t),v(t)]\\&=\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+[(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)]-2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中

$$(g_i\circ w)(t)=\int_0^t g_i(t-s)\|w(t)-w(s)\|^2\mathrm{d}s,\quad i=1,2.$$

定义问题 (1.1)–(1.4) 的稳定集 $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}=\{[u,v]\in[H_0^1(\Omega)]^n\times[H_0^1(\Omega)]^n:\ \mathcal{K}(t)>0\}\cup\{0\}.$$

定义 2.1 如果

$$\begin{aligned}&u\in C([0,T),[H_0^1(\Omega)]^n),\quad v\in C([0,T),[H_0^1(\Omega)]^n),\\&u_t\in C([0,T),[L^{r_1}(\Omega)]^n),\quad v_t\in C([0,T),[L^{r_2}(\Omega)]^n),\\&[u(0),v(0)]=[u_0,v_0]\in[H_0^1(\Omega)]^n\times[H_0^1(\Omega)]^n,\end{aligned}$$

并且 $[u,v]$ 满足

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega A_1(s)|u_t(x,s)|^{r_1-2}u_t(x,s)\phi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_\Omega\nabla u(x,s)\nabla\phi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\int_\Omega\int_0^s g_1(s-\tau)\nabla u(x,\tau)\nabla\phi(x,s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^t\int_\Omega f_1(u,v)\phi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\\&\int_0^t\int_\Omega A_2(s)|v_t(x,s)|^{r_2-2}v_t(x,s)\psi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_\Omega\nabla v(x,s)\nabla\psi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\int_\Omega\int_0^s g_2(s-\tau)\nabla v(x,\tau)\nabla\psi(x,s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^t\int_\Omega f_2(u,v)\psi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中函数 $[\phi,\psi]\in[H_0^1(\Omega)]^n\times[H_0^1(\Omega)]^n$, $t\in[0,T)$, 则 $[u,v]$ 称为问题 (1.1)–(1.4) 的弱解.

本文所用引理叙述如下.

引理 2.1 设 $[u,v]$ 是问题 (1.1)–(1.4) 的解, 则 $\mathcal{J}(t)$ 是关于 t 的非增函数, 且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{J}(t)=-\Big(&\int_\Omega[A_1(t)|u_t|^{r_1}+A_2(t)|v_t|^{r_2}]\mathrm{d}x+\frac12 g_1(t)\|\nabla u(t)\|^2\\&+\frac12 g_2(t)\|\nabla v(t)\|^2-\frac12(g_1'\circ\nabla u)(t)-\frac12(g_2'\circ\nabla v)(t)\Big)\leqslant 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

证 方程 (1.1) 和 (1.2) 两边分别同乘以 u_t 和 v_t, 并在 $\Omega\times[0,t]$ 上积分. 然后两式相加, 由分部积分, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(0)=-\int_0^t\Big(&\int_\Omega[A_1(s)|u_t|^{r_1}+A_2(s)|v_t|^{r_2}]\mathrm{d}x+\frac12 g_1(s)\|\nabla u(s)\|^2\\&+\frac12 g_2(s)\|\nabla v(s)\|^2-\frac12(g_1'\circ\nabla u)(s)-\frac12(g_2'\circ\nabla v)(s)\Big)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

由此可知，$\mathcal{J}(t)$ 是可积函数的原函数，故对于任一正则解 $[u,v]$, 函数 $\mathcal{J}(t)$ 关于 t 绝对连续并满足等式 (2.3)．因此，由稠密性原理知，结论成立.

类似于文 [7, 15–18] 的讨论，可得问题 (1.1)–(1.4) 局部解的存在唯一性．其结果叙述如下.

定理 2.1 假设 (H1)–(H3) 成立，如果初值 $[u_0,v_0]\in[H_0^1(\Omega)]^n\times[H_0^1(\Omega)]^n$, 则存在 $T>0$, 使得问题 (1.1)–(1.4) 有唯一的局部解 $[u(t),v(t)]$, 并满足

$$u,\ v\in C([0,T);\ [H_0^1(\Omega)]^n),\quad u_t\in[L^{r_1}(\Omega\times(0,T))]^n,\quad v_t\in[L^{r_2}(\Omega\times(0,T))]^n.$$

§3 整体解的存在性

下面的引理在问题 (1.1)–(1.4) 的整体解研究中起着重要的作用.

引理 3.1 如果 (H1)–(H3) 成立，并且初值 $[u_0,v_0]\in\mathcal{W}$ 满足

$$\beta=\frac{C_1C_*^{2p}}{l}\Big[\frac{2p}{(p-1)l}\mathcal{J}(0)\Big]^{p-1}<1,\tag{3.1}$$

则 $[u(t),v(t)]\in\mathcal{W},\ \forall t\in[0,T)$.

证 由 $[u_0,v_0]\in\mathcal{W}$ 知，$\mathcal{K}(0)>0$. 因此，由 $\mathcal{K}(t)$ 的连续性知，存在 $T_*\leqslant T$, 使得 $\mathcal{K}(t)\geqslant 0,\ \forall t\in[0,T_*]$. 也就是说，对于 $t\in[0,T_*]$, 有下面的不等式成立：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t)&=\frac12\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\frac12\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+\frac12[(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)]-\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x\\&=\frac{p-1}{2p}\Big\{\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+[(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)]\Big\}+\frac{1}{2p}\mathcal{K}(t)\\&\geqslant\frac{p-1}{2p}\Big\{\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+[(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)]\Big\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

由 (H1), (3.2) 和引理 2.1 知，

$$\begin{aligned}&l_1\|\nabla u(t)\|^2+l_2\|\nabla v(t)\|^2\\&\leqslant\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\leqslant\frac{2p}{p-1}\mathcal{J}(t)\leqslant\frac{2p}{p-1}\mathcal{J}(0),\quad\forall t\in[0,T_*].\end{aligned}\tag{3.3}$$

应用 Sobolev 不等式，并结合 (H1)–(H3), (3.1) 和 (3.3), 得

$$2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega [uf_1(u,v) + vf_2(u,v)]\mathrm{d}x \\
&\leqslant C_1(\|u\|_{2p}^{2p} + \|v\|_{2p}^{2p}) \\
&\leqslant C_1 C_*^{2p}(\|\nabla u\|^{2p} + \|\nabla v\|^{2p}) \\
&\leqslant C_1 C_*^{2p}\Big(\frac{1}{l_1}\|\nabla u\|^{2(p-1)} l_1\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{l_2}\|\nabla v\|^{2(p-1)} l_2\|\nabla v\|^2\Big) \\
&\leqslant \frac{C_1 C_*^{2p}}{l}\Big[\frac{2p}{(p-1)l}\mathcal{J}(0)\Big]^{p-1}(l_1\|\nabla u\|^2 + l_2\|\nabla v\|^2) \\
&= \beta(l_1\|\nabla u\|^2 + l_2\|\nabla v\|^2) \\
&< \Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2 + \Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2 \\
&\quad + [(g_1 \circ \nabla u)(t) + (g_2 \circ \nabla v)(t)], \quad \forall t \in [0, T_*].
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

因此， $\mathcal{K}(t) > 0$, $\forall t \in [0, T_*]$. 注意到

$$
\lim_{t \to T_*} \frac{C_1 C_*^{2p}}{l}\Big[\frac{2p}{(p-1)l}\mathcal{J}(t)\Big]^{p-1} \leqslant \beta < 1,
$$

重复上述推导过程，可把 T_* 延拓到 T. 引理 3.1 证毕.

定理 3.1 假设 (H1)–(H3) 成立， $[u(t), v(t)]$ 是定理 2.1 得到的局部解. 如果初值 $[u_0, v_0] \in \mathcal{W}$ 满足 (3.1), 则 $[u(t), v(t)]$ 是问题 (1.1)–(1.4) 的整体解.

证 只要证明 $\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2$ 是有界 (不依赖于时间 t) 的即可. 在定理 3.1 的条件下，由引理 3.1 知， $[u, v] \in \mathcal{W}$, $\forall t \in [0, T)$.

结合 (3.2) 和 (H1), 得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(0) &\geqslant \mathcal{J}(t) \\
&\geqslant \frac{p-1}{2p}\Big\{\Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2 \\
&\quad + \Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2 + [(g_1 \circ \nabla u)(t) + (g_2 \circ \nabla v)(t)]\Big\} \\
&\geqslant \frac{p-1}{2p}(l_1\|\nabla u(t)\|^2 + l_2\|\nabla v(t)\|^2) \\
&\geqslant \frac{(p-1)l}{2p}(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2),
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

即

$$
\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 \leqslant \frac{2p}{(p-1)l}\mathcal{E}(0) < +\infty. \tag{3.6}
$$

由不等式 (3.6) 和连续性原理 [19–20] 知，问题 (1.1)–(1.4) 存在整体解 $[u, v]$. 定理 3.1 证毕.

§4 整体解的衰减性

为了建立问题 (1.1)–(1.4) 整体解的衰减估计，我们需要下面的两个引理.

引理 4.1 [21]　设 $\varphi(t)\geqslant 0$ 是 $[0,T]$ 上的非增函数，并满足

$$\varphi(t)^{1+\alpha}\leqslant k_0(\varphi(t)-\varphi(t+1)),\quad \forall t\in[0,T],$$

其中 $k_0>0$ 和 $\alpha\geqslant 0$ 是常数. 则 $\varphi(t)$ 有下面的衰减性质：

(i) 当 $\alpha>0$ 时，

$$\varphi(t)\leqslant(\varphi(0)^{-\alpha}+{k_0}^{-1}\alpha[t-1]^+)^{-\frac{1}{\alpha}},\quad t\in[0,T],$$

其中 $[t-1]^+=\max\{t-1,\ 0\}$.

(ii) 当 $\alpha=0$ 时，

$$\varphi(t)\leqslant\varphi(0)\mathrm{e}^{-k[t-1]^+},\quad t\in[0,T],$$

其中 $k=\ln\frac{k_0}{k_0-1}$.

引理 4.2　在定理 3.1 的条件下，如果初值 $[u_0,v_0]\in\mathcal{W}$ 满足 (3.1), 则

$$\begin{aligned}&\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v\|^2\\&+(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)\leqslant\frac{1}{\theta}\mathcal{K}(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $\theta=1-\beta>0$ 是常数.

证　令 $\beta=1-\theta$, 由 (H1) 和 (3.4), 知

$$\begin{aligned}&2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega[uf_1(u,v)+vf_2(u,v)]\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{C_1C_*^{2p}}{l}\Big[\frac{2p}{(p-1)l}\mathcal{E}(0)\Big]^{p-1}(l_1\|\nabla u\|^2+l_2\|\nabla v\|^2)\\&=\beta(l_1\|\nabla u\|^2+l_2\|\nabla v\|^2)\\&=(1-\theta)(l_1\|\nabla u\|^2+l_2\|\nabla v\|^2)\\&\leqslant(1-\theta)\Big[\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)\Big]\\&=\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&\quad+(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)\\&\quad-\theta\Big[\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v\|^2\end{aligned}$$

$$+(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)\Big]. \tag{4.2}$$

联合 (2.2) 和 (4.2), 得

$$\theta\Big[\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v\|^2+(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)\Big]\leqslant\mathcal{K}(t).$$

因此, (4.1) 成立.

定理 4.1 在定理 3.1 的条件下，问题 (1.1)–(1.4) 的整体解 $[u,v]\in\mathcal{W}$ 满足如下的衰减估计：

(i) 当 $r_1=r_2=2$ 时, $\mathcal{J}(t)\leqslant\mathcal{J}(0)\mathrm{e}^{-k[t-1]^+}$.

(ii) 当 r_1, $r_2>2$ 时, $\mathcal{J}(t)\leqslant(\mathcal{J}(0)^{-\alpha}+\gamma\alpha[t-1]^+)^{-\frac{1}{\alpha}}$, 其中 $\alpha=\max\big\{\frac{r_1-2}{2},\ \frac{r_2-2}{2}\big\}$, k 和 γ 是正常数.

证 方程 (1.1) 和 (1.2) 的两边分别同乘以 u_t 和 v_t, 并在 $\Omega\times[t,t+1]$ 上积分. 然后两式相加，由 (1.5), 得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)=&\int_t^{t+1}\Big(\int_\Omega[|u_t|^{r_1-2}A_1(s)u_t\cdot u_t+|v_t|^{r_2-2}A_2(s)v_t\cdot v_t]\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}g_1(s)\|\nabla u(s)\|^2+\frac{1}{2}g_2(s)\|\nabla v(s)\|^2\\&-\frac{1}{2}(g_1'\circ\nabla u)(s)-\frac{1}{2}(g_2'\circ\nabla v)(s)\Big)\mathrm{d}s\\\geqslant&\int_t^{t+1}\Big(c_1\|u_t(s)\|_{r_1}^{r_1}+c_2\|v_t(s)\|_{r_2}^{r_2}+\frac{1}{2}g_1(s)\|\nabla u(s)\|^2\\&+\frac{1}{2}g_2(s)\|\nabla v(s)\|^2-\frac{1}{2}(g_1'\circ\nabla u)(s)-\frac{1}{2}(g_2'\circ\nabla v)(s)\Big)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.3}$$

另一方面，方程 (1.1) 和 (1.2) 的两边分别同乘以 u 和 v, 并在 $\Omega\times[t,t+1]$ 上积分. 然后两式相加，得

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s=&-\int_t^{t+1}\int_\Omega A_1(s)|u_t|^{r_1-2}u_tu\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&-\int_t^{t+1}\int_\Omega A_2(s)|v_t|^{r_2-2}v_tv\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\int_t^{t+1}\int_\Omega\int_0^s g_1(s-\tau)\nabla u(s)[\nabla u(\tau)-\nabla u(s)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\int_t^{t+1}\int_\Omega\int_0^s g_2(s-\tau)\nabla v(s)[\nabla v(\tau)-\nabla v(s)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\int_t^{t+1}(g_1\circ\nabla u)(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t+1}(g_2\circ\nabla v)(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.4}$$

设 $B_i=\sup\limits_{t\in R^+}A_i(t)$, $i=1,2$, 则由 Hölder 不等式, (H3), Sobolev 不等式和 (3.5) 有下面的不等式成立：

$$-\int_t^{t+1}\int_\Omega A_1(s)|u_t|^{r_1-2}u_tu\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \Big|\int_t^{t+1}\int_\Omega A_1(s)|u_t|^{r_1-2}u_t u\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big| \\
&\leqslant B_1\int_t^{t+1}\int_\Omega ||u_t|^{r_1-2}u_t u|\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant B_1\int_t^{t+1}\|u_t(s)\|_{r_1}^{r_1-1}\|u(s)\|_{r_1}\mathrm{d}s \\
&\leqslant C_*B_1\int_t^{t+1}\|u_t(s)\|_{r_1}^{r_1-1}\|\nabla u(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant C_*B_1\Big(\frac{2p}{(p-1)l}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sup_{t\leqslant s\leqslant t+1}\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(s)\Big)\Big(\int_t^{t+1}\|u_t(s)\|_{r_1}^{r_1-1}\mathrm{d}s\Big). \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

由 Hölder 不等式和 (4.3), 知

$$
\int_t^{t+1}\|u_t(s)\|_{r_1}^{r_1-1}\mathrm{d}s \leqslant \Big(\int_t^{t+1}\|u_t(s)\|_{r_1}^{r_1}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{r_1-1}{r_1}} \leqslant c_1^{\frac{1-r_1}{r_1}}(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}}. \qquad (4.6)
$$

从 (4.5) 和 (4.6), 有

$$
-\int_t^{t+1}\int_\Omega A_1(s)|u_t|^{r_1-2}u_t u\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant C_2\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}}, \qquad (4.7)
$$

其中 $C_2=C_*B_1\big(\frac{2p}{(p-1)l}\big)^{\frac{1}{2}}c_1^{\frac{1-r_1}{r_1}}$.

类似地，有

$$
-\int_t^{t+1}\int_\Omega A_2(s)|v_t|^{r_2-2}v_t v\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant C_3\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_2-1}{r_2}}, \qquad (4.8)
$$

其中 $C_3=C_*B_1\big(\frac{2p}{(p-1)l}\big)^{\frac{1}{2}}c_2^{\frac{1-r_2}{r_2}}$.

应用 Young 不等式，得

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+1}\int_\Omega\int_0^s g_1(s-\tau)\nabla u(s)[\nabla u(\tau)-\nabla u(s)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant \sigma\int_t^{t+1}\int_0^s g_1(s-\tau)\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\frac{1}{4\sigma}\int_t^{t+1}(g_1\circ\nabla u)(s)\mathrm{d}s, \qquad (4.9) \\
&\int_t^{t+1}\int_\Omega\int_0^s g_2(s-\tau)\nabla v(s)[\nabla v(\tau)-\nabla v(s)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant \sigma\int_t^{t+1}\int_0^s g_2(s-\tau)\|\nabla v(s)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\frac{1}{4\sigma}\int_t^{t+1}(g_2\circ\nabla v)(s)\mathrm{d}s, \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

其中 $\sigma>0$ 是常数.

因此，由 (4.4) 及 (4.7)–(4.10), 知

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s \leqslant{} & C_2\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}} \\
&+C_3\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_2-1}{r_2}} \\
&+\sigma\int_t^{t+1}\int_0^s g_1(s-\tau)\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&+\sigma\int_t^{t+1}\int_0^s g_2(s-\tau)\|\nabla v(s)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$+\Big(\frac{1}{4\sigma}+1\Big)\Big(\int_t^{t+1}(g_1\circ\nabla u)(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t+1}(g_2\circ\nabla v)(s)\mathrm{d}s\Big).\tag{4.11}$$

另一方面，根据 (H1) 和 (4.3), 可得

$$\int_t^{t+1}(g_1\circ\nabla u)(s)\mathrm{d}s\leqslant-\frac{1}{\xi_1}\int_t^{t+1}(g_1'\circ\nabla u)(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{2}{\xi_1}[\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)],\tag{4.12}$$

$$\int_t^{t+1}(g_2\circ\nabla v)(s)\mathrm{d}s\leqslant-\frac{1}{\xi_2}\int_t^{t+1}(g_2'\circ\nabla v)(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{2}{\xi_2}[\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)].\tag{4.13}$$

联合 (H1) 和 (4.1), 有

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\int_0^s g_1(s-\tau)\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&=\int_t^{t+1}\|\nabla u(s)\|^2\int_0^s g_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\leqslant(1-l_1)\int_t^{t+1}\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1-l_1}{l_1\theta}\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\int_0^s g_2(s-\tau)\|\nabla v(s)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&=\int_t^{t+1}\|\nabla v(s)\|^2\int_0^s g_2(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\leqslant(1-l_2)\int_t^{t+1}\|\nabla v(s)\|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1-l_2}{l_2\theta}\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.15}$$

由 (4.11)–(4.15) 可推得如下不等式：

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s\leqslant{}&C_2\mathcal{J}^{\frac12}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}}\\&+C_3\mathcal{J}^{\frac12}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_2-1}{r_2}}\\&+\frac{2}{\xi}\Big(\frac{1}{4\sigma}+1\Big)[\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)]+\frac{(1-l)\sigma}{l\theta}\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{4.16}$$

其中 $\xi=\min\{\xi_1,\ \xi_2\}$. 选取 σ 足够小，使得 $\sigma<\frac{\theta l}{1-l}$. 由 (4.16), 得

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\mathcal{K}(s)\mathrm{d}s\leqslant{}&C_4[\mathcal{J}^{\frac12}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}}\\&+\mathcal{J}^{\frac12}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_2-1}{r_2}}+(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))],\end{aligned}\tag{4.17}$$

其中 $C_4=\big(1-\frac{(1-l)\sigma}{l\theta}\big)\max\big\{C_2,\ C_3,\ \frac{2}{\xi}\big(\frac{1}{4\sigma}+1\big)\big\}$.

由 (2.1)–(2.2), 并结合引理 4.2 中的 (4.1), 可知

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t)={}&\frac{p-1}{2p}\Big\{\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\&+[(g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)]\Big\}+\frac{1}{2p}\mathcal{K}(t)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{p+\theta-1}{2p\theta}\mathcal{K}(t). \tag{4.18}$$

(4.18) 式两边同时在 $[t,\, t+1]$ 上积分，并应用 (4.17), 得

$$\int_t^{t+1}\mathcal{J}(s)\mathrm{d}s \leqslant C_5[\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}} + \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_2-1}{r_2}} + (\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))], \tag{4.19}$$

其中 $C_5 = \frac{p+\theta-1}{2p\theta}C_4$.

由引理 2.1 知，

$$\mathcal{J}(t+1) \leqslant \mathcal{J}(s), \quad \forall s \leqslant t+1.$$

因此

$$\mathcal{J}(t+1) \leqslant \int_t^{t+1}\mathcal{J}(s)\mathrm{d}s. \tag{4.20}$$

由 (4.19) 和 (4.20), 得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t) &= \mathcal{J}(t+1) + [\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)]\\ &\leqslant \int_t^{t+1}\mathcal{J}(s)\mathrm{d}s + [\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)]\\ &\leqslant C_5[\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_1-1}{r_1}} + \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(t)(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{r_2-1}{r_2}}\\ &\quad + (\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))] + (\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)),\end{aligned} \tag{4.21}$$

由 (4.21), 并借助于 Young 不等式 (令 $\varepsilon = 1,\ \mu = \nu = 2$), 得

$$\mathcal{J}(t) \leqslant C_6[(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{2(r_1-1)}{r_1}} + (\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\frac{2(r_2-1)}{r_2}} + (\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))], \tag{4.22}$$

其中 $C_6 > 0$ 是依赖于已知常数的常数.

当 $r_1 = r_2 = 2$ 时，由 (4.22), 有

$$\mathcal{J}(t) \leqslant 3C_6(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)). \tag{4.23}$$

把引理 4.2 应用到 (4.23) 式，得

$$\mathcal{J}(t) \leqslant \mathcal{J}(0)\mathrm{e}^{-k[t-1]^+},$$

其中

$$k = \ln\frac{3C_6}{3C_6-1}.$$

当 $r_1, r_2 > 2$ 时，由 (4.22) 可得下式成立

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t) &\leqslant C_6[\mathcal{J}(0)^{r_1-1} + \mathcal{J}(0)^{r_2-1} + \mathcal{J}(0)^{1-\min\{\frac{2}{r_1},\ \frac{2}{r_2}\}}](\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\min\{\frac{2}{r_1},\ \frac{2}{r_2}\}}\\ &\leqslant C_7(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1))^{\min\{\frac{2}{r_1},\ \frac{2}{r_2}\}},\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中

$$C_7 = C_6[\mathcal{J}(0)^{r_1-1} + \mathcal{J}(0)^{r_2-1} + \mathcal{J}(0)^{1-\min\{\frac{2}{r_1},\ \frac{2}{r_2}\}}].$$

由 (4.24), 知

$$\mathcal{J}(t)^{1+\max\{\frac{r_1-2}{2},\ \frac{r_2-2}{2}\}} \leqslant C_8(\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(t+1)), \tag{4.25}$$

其中 $C_8 = C_7^{\max\{\frac{r_1}{2},\ \frac{r_2}{2}\}}$.

令 $\alpha = \max\left\{\frac{r_1-2}{2},\ \frac{r_2-2}{2}\right\}$, 把 (4.25) 应用于引理 4.2, 得

$$\mathcal{J}(t) \leqslant (\mathcal{J}(0)^{-\alpha} + \gamma\alpha[t-1]^+)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

其中 $\gamma = \frac{1}{C_8}$.

§5 解的爆破

本节研究问题 (1.1)–(1.4) 解的爆破性质，为此令

$$\lambda_1 = \Big(\frac{1}{C_9 C_*^{2p}}\Big)^{\frac{1}{2(p-1)}}, \quad d = \frac{p-1}{2p}\lambda_1^2, \tag{5.1}$$

其中常数 $C_9 > 0$ 由 (5.8) 给出.

定义函数

$$\begin{aligned}\rho(t) = {} & \Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2 + \Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2 \\ & + (g_1\circ\nabla u)(t) + (g_2\circ\nabla v)(t).\end{aligned} \tag{5.2}$$

类似于 Vitillaro[14] 研究单个波动方程解的爆破性，我们引入如下引理.

引理 5.1 假设 (H1)–(H3) 成立， $[u,v]$ 问题 (1.1)–(1.4) 的解. 如果 $\mathcal{J}(0) < d$, 且

$$(\|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2)^{\frac{1}{2}} > \lambda_1, \tag{5.3}$$

则存在常数 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, 使得

$$\rho(t)^{\frac{1}{2}} \geqslant \lambda_2, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.4}$$

证 由 Minkowski 不等式及 Sobolev 不等式，得

$$\|u+v\|_{2p}^2 \leqslant 2(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2) \leqslant 2C_*^2(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2). \tag{5.5}$$

联合 Hölder 不等式， Young 不等式和 Sobolev 不等式，有下面不等式成立：

$$\|uv\|_p \leqslant \|u\|_{2p}\|v\|_{2p} \leqslant \frac{1}{2}(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2) \leqslant \frac{C_*^2}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2). \tag{5.6}$$

由 (H1)–(H3) 和 (5.5)–(5.6), 知

$$\begin{aligned}&\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2p}\int_\Omega [uf_1(u,v) + vf_2(u,v)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{2p}(\|u+v\|_{2p}^{2p} + \|uv\|_p^p) \\ &\leqslant \frac{aC_*^{2p}}{2p}\Big(2^p + \frac{1}{2^p}\Big)(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)^p\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{C_9 C_*^{2p}}{2p}(l_1\|\nabla u\|^2 + l_2\|\nabla v\|^2)^p, \tag{5.7}$$

其中

$$C_9 = \frac{a}{l^p}\Big(2^p + \frac{1}{2^p}\Big). \tag{5.8}$$

从 (H1), (2.1) 和 (5.7) 可推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(t) &= \frac{1}{2}\Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}[(g_1 \circ \nabla u)(t) + (g_2 \circ \nabla v)(t)] - \int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{2}\rho(t) - \frac{C_9 C_*^{2p}}{2p}(l_1\|\nabla u\|^2 + l_2\|\nabla v\|^2)^p \\
&\geqslant \frac{1}{2}\rho(t) - \frac{C_9 C_*^{2p}}{2p}\rho(t)^p \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{C_9 C_*^{2p}}{2p}\lambda^{2p} \\
&= Q(\lambda),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

这里 $\lambda = \rho(t)^{\frac{1}{2}}$. 容易证明函数 $Q(\lambda)$ 具有如下性质： $0 < \lambda < \lambda_1$ 时， $Q(\lambda)$ 是单增函数，$\lambda > \lambda_1$ 时， $Q(\lambda)$ 是单减函数， $\lambda \to +\infty$ 时， $Q(\lambda) \to -\infty$, 并且

$$Q(\lambda_1) = \frac{1}{2}\lambda_1^2 - \frac{C_9 C_*^{2p}}{2p}\lambda_1^{2p} = \frac{p-1}{2p}\lambda_1^2 = d.$$

则由 $\mathcal{J}(0) < d$ 知，存在 $\lambda_2 > \lambda_1$, 满足 $Q(\lambda_2) = \mathcal{J}(0)$.

设

$$\lambda_0 = (\|\nabla u(0)\|^2 + \|\nabla v(0)\|^2)^{\frac{1}{2}} = \rho(0)^{\frac{1}{2}},$$

则由 (5.9), 有

$$Q(\lambda_0) \leqslant \mathcal{J}(0) = Q(\lambda_2),$$

即 $\lambda_0 \geqslant \lambda_2$.

为证明 (5.4) 成立，我们使用反证法. 假设存在 $t_0 > 0$, 使得 $\rho(t_0)^{\frac{1}{2}} < \lambda_2$. 由函数 $\rho(t)$ 关于 t 的连续性，可选取 t_0 满足 $\rho(t_0)^{\frac{1}{2}} > \lambda_1$. 由 (5.9) 知，

$$\mathcal{J}(t_0) \geqslant Q(\rho(t_0)^{\frac{1}{2}}) > Q(\lambda_2) = \mathcal{J}(0).$$

这和 $\mathcal{J}(t) < \mathcal{J}(0)$, $\forall t \in [0,T)$ 矛盾. 因此， (5.4) 成立.

引理 5.1 证毕.

为证明解的爆破性质，进一步对参数 m 和函数 $g_i(\cdot)$ 做如下假设： $2 < m < 2p$, 且

$$\int_0^\infty g_i(s)\mathrm{d}s < \frac{\frac{m}{2} - 1}{\frac{m}{2} + \frac{1}{2m} - 1}, \quad i = 1,2. \tag{5.10}$$

定理 5.1 假设 (H1)–(H3), (1.5) 和 (5.10) 成立，如果 $2 \leqslant r_i < 2p,\ i=1,2$, 并且初值 $[u_0, v_0] \in [H_0^1(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega)]^n$ 满足

$$0 \leqslant \mathcal{J}(0) < \widetilde{d} = \Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{2p}\Big)\lambda_1^2$$

和 $(\|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2)^{\frac{1}{2}} > \lambda_1$, 则问题 (1.1)–(1.4) 的局部解在有限时间内发生爆破.

证 设

$$\mathcal{H}(t) = \widetilde{d} - \mathcal{J}(t), \tag{5.11}$$

则从 (2.1), (2.3), (5.2), (5.11) 和引理 5.1, 有

$$\begin{aligned}
0 < \mathcal{H}(0) \leqslant \mathcal{H}(t) &= \widetilde{d} - \mathcal{J}(t) \\
&\leqslant \widetilde{d} - \frac{\lambda_2^2}{2} + \int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x \\
&< \Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{2p}\Big)\lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2}{2} + \int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x \\
&< -\frac{1}{2p}\lambda_1^2 + \int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

因此

$$C_1(\|u\|_{2p}^{2p} + \|v\|_{2p}^{2p}) \geqslant \int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x > \frac{1}{2p}\lambda_1^2 + \mathcal{H}(t). \tag{5.13}$$

方程 (1.1) 和 (1.2) 的两边分别乘以 u 和 v, 并在 Ω 上积分. 然后两式相加，由 (2.1), 并结合 Young 不等式和 (5.11), 得

$$\begin{aligned}
0 &= 2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla v\|^2 \\
&\quad + \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\nabla u(t)\nabla u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \int_0^t g_2(t-s)\nabla v(t)\nabla v(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&\quad - (A_1(t)|u_t|^{r_1-2}u_t,\ u) - (A_2(t)|v_t|^{r_2-2}v_t,\ v) \\
&= 2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - \Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u\|^2 - \Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v\|^2 \\
&\quad + \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\nabla u(t)[\nabla u(s) - \nabla u(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Omega \int_0^t g_2(t-s)\nabla v(t)[\nabla v(s) - \nabla v(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\quad - (A_1(t)|u_t|^{r_1-2}u_t,\ u) - (A_2(t)|v_t|^{r_2-2}v_t,\ v) + m\mathcal{J}(t) - m\mathcal{J}(t) \\
&\geqslant (2p-m)\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x + \Big(\frac{m}{2} - 1\Big)\Big(1 - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u\|^2 \\
&\quad + \Big(\frac{m}{2} - 1\Big)\Big(1 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v\|^2 + \frac{m}{2}(g_1 \circ \nabla u)(t) + \frac{m}{2}(g_2 \circ \nabla v(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \Big[\delta(g_1\circ\nabla u)(t)) + \frac{1}{4\delta}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\|\nabla u(t)\|^2 + \delta g_2\circ\nabla v)(t))\\
&+ \frac{1}{4\delta}\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\|\nabla v(t)\|^2\Big] - (A_1(t)|u_t|^{r_1-2}u_t,\ u)\\
&- (A_2(t)|v_t|^{r_2-2}v_t,\ v) + m\mathcal{H}(t) - m\widetilde{d}\\
\geqslant\ & a_1[(g_1\circ\nabla u)(t) + (g_2\circ\nabla v)(t)] + a_2\|\nabla u\|^2 + a_3\|\nabla v\|^2\\
&- (A_1(t)|u_t|^{r_1-2}u_t,\ u) - (A_2(t)|v_t|^{r_2-2}v_t,\ v)\\
&+ (2p-m)\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - m\widetilde{d}, \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{m}{2} - \delta,\\
a_2 &= \Big(\frac{m}{2}-1\Big) - \Big(\frac{m}{2}-1+\frac{1}{4\delta}\Big)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s,\\
a_3 &= \Big(\frac{m}{2}-1\Big) - \Big(\frac{m}{2}-1+\frac{1}{4\delta}\Big)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

选取 δ, 使得 $0<\delta<\frac{m}{2}$, 由 (5.10) 知， $a_i>0,\ i=1,2,3$. 另一方面，由 (2.1) 和引理 2.1, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(1-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\Big(1-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla v(t)\|^2\\
&+ \frac{1}{2}[(g_1\circ\nabla u)(t) + (g_2\circ\nabla v)(t)] \leqslant \mathcal{J}(0) + 2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

由 (5.15) 和引理 5.1, 有

$$
2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\rho(t)}{2} - \mathcal{J}(0) \geqslant \frac{\lambda_2^2}{2} - Q(\lambda_2) = \frac{C_9C_*^{2p}}{2p}\lambda_2^{2p}. \qquad (5.16)
$$

由 (5.16), 知

$$
\begin{aligned}
&(2p-m)\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - m\widetilde{d}\\
&= (2p-m)\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - m\frac{2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x}{2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x}\widetilde{d}\\
&\geqslant (2p-m)\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - \frac{2mp\widetilde{d}}{C_9(\lambda_2C_*)^{2p}}\Big(2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x\Big)\\
&= C_{10}\cdot 2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x, \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

其中 $C_{10} = 1 - \frac{m}{2p} - \frac{2mp\widetilde{d}}{C_9(\lambda_2C_*)^{2p}}$. 由 (5.1) 知， $C_{10}>0$.

联合 (1.5), (5.14), (5.17), (H2) 和 Young 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant C_{10}\cdot 2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - (A_1(t)|u_t|^{r_1-2}u_t,\ u) - (A_2(t)|v_t|^{r_2-2}v_t,\ v)\\
&\geqslant C_{10}\cdot 2p\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x - d_1\|u\|_{2p}\|u_t\|^{r_1-1}_{\frac{2p(r_1-1)}{2p-1}} - d_2\|v\|_{2p}\|v_t\|^{r_2-1}_{\frac{2p(r_2-1)}{2p-1}}
\end{aligned}
$$

$$\geqslant (C_0C_{10}-\varepsilon)(\|u\|_{2p}^{2p}+\|v\|_{2p}^{2p})-C(\varepsilon)(\|u_t\|_{\frac{2p(r_1-1)}{2p-1}}^{\frac{2p(r_1-1)}{2p-1}}+\|v_t\|_{\frac{2p(r_2-1)}{2p-1}}^{\frac{2p(r_2-1)}{2p-1}}). \tag{5.18}$$

选取 ε 足够小，使得 $\varepsilon < C_0C_{10}$. 由 (5.18), 知

$$\|u_t\|_{\frac{2p(r_1-1)}{2p-1}}^{\frac{2p(r_1-1)}{2p-1}}+\|v_t\|_{\frac{2p(r_2-1)}{2p-1}}^{\frac{2p(r_2-1)}{2p-1}} \geqslant C_{11}(\|u\|_{2p}^{2p}+\|v\|_{2p}^{2p}). \tag{5.19}$$

因为 $2 \leqslant r_i < 2p,\ i=1,2$, 所以 $r_i \geqslant \frac{2p(r_i-1)}{2p-1}$.

从 (1.5), (H2), (2.3), (5.13) 和 (5.19), 得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'(t) &= -\mathcal{J}'(t)\\ &\geqslant c_1\|u_t\|_{r_1}^{r_1}+c_2\|v_t\|_{r_2}^{r_2}\\ &\geqslant C_{12}(\|u_t\|_{\frac{2p(r_1-1)}{2p-1}}^{r_1}+\|v_t\|_{\frac{2p(r_2-1)}{2p-1}}^{r_2})\\ &\geqslant C_{13}(\|u\|_{2p}^{2p}+\|v\|_{2p}^{2p})^{\frac{(2p-1)r}{2p(r-1)}}\\ &\geqslant C_{14}\Big(\frac{1}{2p}\lambda_1^2+\mathcal{H}(t)\Big)^{\frac{(2p-1)r}{2p(r-1)}},\end{aligned} \tag{5.20}$$

其中 $r=\max\{r_1,\ r_2\}$. 由 (5.20), 知

$$\Big(\mathcal{H}(t)+\frac{1}{2p}\lambda_1^2\Big)' \geqslant C_{14}\Big(\mathcal{H}(t)+\frac{1}{2p}\lambda_1^2\Big)^{\frac{(2p-1)r}{2p(r-1)}}. \tag{5.21}$$

(5.21) 式两边在 $[0,t]$ 上积分，得

$$\mathcal{H}(t)+\frac{1}{2p}\lambda_1^2 \geqslant \Big(\frac{1}{\mathcal{H}(0)+\frac{1}{2p}\lambda_1^2-C_{15}t}\Big)^{\frac{2p(r-1)}{2p-r}}, \tag{5.22}$$

这里 $C_{15}=\frac{2p(r-1)}{2p-r}C_{14}>0$.

注意到 $\mathcal{H}(t) \geqslant \mathcal{H}(0)=\widetilde{d}-\mathcal{E}(0)\in(0,\widetilde{d})$ 及 $2\leqslant r<2p$, 则存在 $T_{\max}=\frac{\mathcal{H}(0)+\frac{1}{2p}\lambda_1^2}{C_{15}}$, 满足 $t\to T_{\max}^-$ 时， $\mathcal{H}(t)\to+\infty$.

由 (H2) 和 (2.1), 有

$$\mathcal{H}(t)\leqslant \widetilde{d}+\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x \leqslant \widetilde{d}+C_1(\|u\|_{2p}^{2p}+\|v\|_{2p}^{2p}),$$

即

$$C_1(\|u\|_{2p}^{2p}+\|v\|_{2p}^{2p})\geqslant \mathcal{H}(t)-\widetilde{d}.$$

因此，在 $L^{2p}(\Omega)$ 范数的意义下，问题 (1.1)–(1.4) 的解 $[u,v]$ 在有限时间内发生爆破.

参 考 文 献

[1] Nohel J A. Nonlinear Volterra equations for heat flow in materials with memory [C]//Integral and Functional Differential Equations (Proc Conf, West Virginia Univ, Morgantown, W.Va, 1979) (Herdman T L, Stech H W, Rankin III S M, eds), Lecture Notes in Pure and Appl Math, New York: Dekker, 1981, 67:3–82.

[2] Friedman A. Mathematics in industrial problems, Part 5 [M]//The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol 49, New York: Springer-Verlag, 1992.

[3] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type [M]. Englewood NJ: Prentice Hall, 1964.

[4] Messaoudi S A. Blow-up of solutions of a semilinear heat equation with a memory term [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2005, 2005(2):87–94, DOI:10.1155/AAA.2005.87.

[5] Messaoudi S A, Tellab B. A general decay result in a quasilinear parabolic system with viscoelastic term [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25:443–447.

[6] Da Prato G, Iannelli M. Existence and regularity for a class of integro-differential equations of parabolic type [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1985, 112:36–55.

[7] Yin H M. On parabolic Volterra eqations in several space dimensions [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1991, 22:1723–1737.

[8] Liu G W, Chen H. Global and blow-up of solutions for a quasilinear parabolic system with viscoelastic and source terms [J]. *Math Meth App Sci*, 2014, 37:148–156.

[9] Pucci P, Serrin J M. Asymptotic stability for nonlinear parabolic systems, Energy methods in continuum mechanics [D]. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1996.

[10] Berrimi S, Messaoudi S A. A decay result for a quasilinear parabolic system [J]. *Procress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, 2005, 63:43–50.

[11] Escobedo M, Herrero M A. Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system [J]. *J Differential Equations*, 1991, 89:176–202.

[12] Escobedo M, Levine H A. Critical blow-up and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1995, 129:47–100.

[13] Payne L E, Sattinger D H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations [J]. *Israel J Math*, 1975, 22:273–303.

[14] Sattinger D H. On global solutions for nonlinear hyperbolic equations [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1968, 30:148–172.

[15] Lions J L. Quelqes méthodes de résolution de problèmes aux limites nonlinéaires [M]. Paris: Dound-Gauthier Villars, 1969.

[16] Vitillaro E. Global existence theorems for a class of evolution equations with dissipation [J]. *Arch Ration Mech Anal*, 1999, 149:155–182.

[17] Yin H M. Weak and classical solutions of some nonlinear Volterra integrodifferential equations [J]. *Comm Partial Differential Equations*, 1992, 17:1369–1385.

[18] Zhao J N. Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$ [J]. *J Math Anal Appl*, 1993, 172:130–146.

[19] Georgiev V, Todorova D. Existence of solutions of the wave equations with nonlinear damping and source terms [J]. *J Differential Equations*, 1994, 109:295–308.

[20] Segal I. Nonlinear semigroups [J]. *Ann of Math*, 1963, 78:339–364.

[21] Nakao M. A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations [J]. *J Math Soc Japan*, 1978, 30:47–762.

A Quasilinear Parabolic Systems with Viscoelastic Term

YE Yaojun[1] LI Lanlan[1]

[1]Department of Mathematics and Statistics, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China.
E-mail: yjye2013@163.com; lc19951102l@163.com

Abstract The initial-boundary value problem for a class of quasilinear parabolic systems with viscoelastic terms and nonlinear source terms is studied. The existence of global solutions for this problem is proved by constructing a stable set, and the asymptotic behavior of the global solutions is establised. Meanwhile, under suitable conditions on relaxation function and the positive initial energy, the authors obtain blow-up result for some solutions and give the lifespan estimates of solutions.

Keywords Quasilinear parabolic systems, Viscoelastic terms, Global solutions, Blow-up, Lifespan estimates

2000 MR Subject Classification 35K40, 35K45, 35K50, 35K55, 35K65

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 3, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA