第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

T正则环与TV环*

张顺华
(聊城师院数学系，山东)

本文定义了T平模的概念，讨论了T平模与平模相似的性质，并由此刻划了T正则环，顺便得到一个奇异环是正刚环的充要条件，最后讨论了TV环的有关结果.

§1 预备知识

设环R是有单位元的结合环，R上的左模范畴记为R-mod．R-mod中的一对模类($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$)称为遗传扭论，是指($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$)满足以下条件:

(1) $\mathcal{T}$对取子模、同态象、直和、扩张封闭.

(2) $\mathcal{F}$对取子模、直积、扩张及内射包封闭.

(3) $F\in\mathcal{F}$当且仅当$\mathrm{Hom}_R(T,F)=0$对所有的$T\in\mathcal{T}$成立.

$\mathcal{T}$称为R-mod的扭类，$\mathcal{F}$称为R-mod的无扭类．$G=\{\sigma\,|\,\sigma$是R的左理想，$R/\sigma\in\mathcal{T}\}$．G称为对应于扭论($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$)的左Gabriel拓扑．环R上的Gabriel拓扑与R-mod中的遗传扭论存在着一一对应.

对任一模$M\in R$-mod，$t(M)=\{x\in M\,|\,\sigma x=0$,对某个$\sigma\in G\}$称为$M$的扭子模．令$G(M)=\{N\,|\,N$是$M$的子模，$M/N\in\mathcal{T}\}$.

模M称为T内射模，是指对每个模L及任意的$N\in G(L)$，N到M的任一同态总能扩充为L到M的同态．易见M是T内射当且仅当$\mathrm{Ext}^1(T,M)=0$．对每个$T\in\mathcal{T}$成立．M是T内射也等价于自然同态$M\cong\mathrm{Hom}_R(R,M)\to\mathrm{Hom}_R(\sigma,M)\to 0$，对所有$\sigma\in G$成立.

对于文中出现的未加定义的概念均请参见[1]，[2].

§2 T平模

取定R-mod中的一个遗传扭论($\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$)．G是相应的左Gabriel拓扑．以下来定义T平模.

定义2.1 设B_R是任一右R模，定义左R模$B^*=\mathrm{Hom}_Z(B,Q/Z)$．模$B$称为T平模，是指$B^*$是T内射左$R$模.

易见，当$G=\{$所有左理想$\}$时，T平模就是一般意义下的平模，由[1]中p204引理2.10知，当G是左Goldie拓扑时，T平模与平模一致.

* 1989年3月27日收到.

命题2.1 右R模B是T平模的充要条件是，对任意左R模正合列$0\to N\to M\to M/N\to 0$，其中$M/N\in\mathcal{T}$，有：$0\to B\otimes N\to B\otimes M\to B\otimes M/N\to 0$也正合．

证明 由$0\to N\to M\to M/N\to 0$正合，$M/N\in\mathcal{T}$，及B_R为T平模$\Rightarrow \mathrm{Hom}_Z(B,Q/Z)$是T内射模．故有：$0\to \mathrm{Hom}_R(M/N,B^*)\to \mathrm{Hom}_R(N,B^*)\to 0$正合，从而$0\to\mathrm{Hom}(B\otimes M/N,Q/Z)\to\mathrm{Hom}(B\otimes M,Q/Z)\to\mathrm{Hom}(B\otimes N,Q/Z)\to 0$正合，由$Q/Z$是内射余生成子，便得，$0\to B\otimes N\to B\otimes M\to B\otimes M/N\to 0$正合．反之上述也对．仅把顺序倒置即可．． ■

命题2.2 T平模的直极限仍是T平模．

证明 设$\{B_k,\varphi_j^k\}$是T平模组成的直系统，要证：$\varinjlim B_k$也是T平模．设$0\to L\xrightarrow{f} M$是左R模正合列，即f单．则有下列可换图：

$$\begin{array}{ccc}(\varinjlim B_k)\otimes L & \xrightarrow{1\otimes f} & (\varinjlim B_k)\otimes M\\ \downarrow & & \downarrow\\ \varinjlim(B_k\otimes L) & \xrightarrow{\varphi} & \varinjlim(B_k\otimes M)\end{array}$$

如果$M/L\in\mathcal{T}$，则φ单$\Rightarrow 1\otimes f$单．即：$\varinjlim B_k$T平模． ■

命题2.3 如果B_R的每个有限生成的子模是T平模，则B也是T平模．

证明 由于B可视为其有限生成子模的直极限，应用命题2.2便得． ■

命题2.4 B_k是T平模的充要条件是：对每个$\sigma\in G$，有：$0\to B\otimes\sigma\to B\otimes R$正合．

证明 "$\Rightarrow$"：由命题2.1可得．

"$\Leftarrow$"：$\forall\sigma\in G$，由$0\to B\otimes\sigma\to B\otimes R$正合，有：$(B\otimes R)^*\to(B\otimes\sigma)^*\to 0$正合．从而有：$\mathrm{Hom}(R,B^*)\to\mathrm{Hom}(\sigma,B^*)\to 0$正合．即：$B^*$是T内射模．因此$B_R$是T平模． ■

命题2.5 模B_R是T平模的充要条件是：对于$\forall\sigma\in G$，有：$\begin{array}{l}B\otimes\sigma\mapsto B\sigma\\ b\otimes a\mapsto ba\end{array}$是同构的．

证明 "$\Rightarrow$"：由于B_R是T平模，$\forall\sigma\in G$．则有：$0\to B\otimes\sigma\xrightarrow{1\otimes l} B\otimes R$正合，从而有：$B\otimes\sigma\simeq(1\otimes l)(B\otimes\sigma)$．由于$\varphi$：$\begin{array}{l}B\otimes R\to R\\ b\otimes r\to br\end{array}$是同构的，故有

$$B\otimes\sigma\simeq\varphi(1\otimes l)(B\otimes\sigma)\simeq\varphi(B\otimes\sigma)=B\sigma\ .$$

"$\Leftarrow$"：$\forall\sigma\in G$．由$B\otimes\sigma\overset{\varphi}{\simeq}B\sigma\xrightarrow{l}B$故有：$0\to B\otimes\sigma\xrightarrow{l\varphi}B$正合．由于$Q/Z$内射模，因此有：$\mathrm{Hom}_Z(B,Q/Z)\to\mathrm{Hom}(B\otimes\sigma,Q/Z)\to 0$正合．又：$\mathrm{Hom}(B\otimes\sigma,Q/Z)\simeq\mathrm{Hom}(\sigma,B^*)$，于是有：$\mathrm{Hom}(B,Q/Z)\simeq\mathrm{Hom}(B\otimes R,Q/Z)\simeq\mathrm{Hom}(R,B^*)\Rightarrow\mathrm{Hom}(R,B^*)\to\mathrm{Hom}(\sigma,B^*)\to$正合．故$B^*$是T内射模．因此$B$是T平模． ■

由正合列：$0\to M'\to M\to M''\to 0$可得一长正合列：$\cdots\to\mathrm{Tor}_n(B,M')\to\mathrm{Tor}_n(B,M)\to\mathrm{Tor}_n(B,M'')\to\cdots\to B\otimes M'\to B\otimes M\to B\otimes M''\to 0$.

由此可得：

命题2.6 设B_R是任一右R模，则以下条件等价：

(1) B_R是T平模．

(2) $\mathrm{Tor}_1(B,M)=0$，对所有$M\in\mathcal{T}$成立．

(3) $\mathrm{Tor}_1(B,R/\sigma)=0$，对所有$\sigma\in G$成立．

证明 (1)$\Rightarrow$(2)：$\forall M\in\mathcal{T}$．有正合列：$0\to K\xrightarrow{l}F\to M\to 0$．其中$F$是自由模．则$K\in G(F)$．（这里$G(M)$表示模$M$的适合$M/L\in\mathcal{T}$的子模$L$所成的集合）．于是有：

$$\mathrm{Tor}_1(B,F)\to\mathrm{Tor}_1(B,M)\to B\otimes K\xrightarrow{1\otimes l}B\otimes F$$ 正合.

由于F是自由模，由[2]中p221定理8.4 知：$\mathrm{Tor}_1(B,F)=0$. 由于B是T平模. 故$1\otimes l$单. 从而$\mathrm{Tor}_1(B,M)=0$.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1)：$\forall\sigma\in G$. 由$0\to\sigma\xrightarrow{l}R—R/\sigma\to 0$正合. 有：$\mathrm{Tor}_1(B,R/\sigma)\to B\otimes\sigma\xrightarrow{1\otimes l}B\otimes R$正合. 由(3)知：$\mathrm{Tor}_1(B,R/\sigma)=0$. 即$1\otimes l$单，故$B_R$是T平模(命题2.4). ■

命题2.7 设F是自由模，$0\to K\xrightarrow{\alpha}F\xrightarrow{\beta}B\to 0$正合. 则$B_R$是T平模的充要条件是：对每个$\sigma\in G$有：$K\cap F\sigma=K\sigma$.

证明 易见：$B\simeq F/K$. $K\sigma\subseteq F\sigma\cap K$. 于是只要证$B_R$是T平模⇔$F\sigma\cap K\subseteq K\sigma$. 由$K\otimes\sigma\xrightarrow{\alpha\otimes}F\otimes\sigma\xrightarrow{\beta\otimes}B\otimes\sigma\to 0$正合. F是自由模⇒$F\otimes\sigma\overset{\varphi}{\simeq}F\sigma$. $\mathrm{Im}(\alpha\otimes)=K\otimes\sigma$. 从而有：$\mathrm{Ker}(\beta\otimes)=\mathrm{Im}(\alpha\otimes)=K\otimes\sigma$.

于是$B\otimes\sigma\simeq F\otimes\sigma/\mathrm{Im}(\alpha\otimes)\simeq F\sigma/K\sigma$ (注意$F\otimes\sigma\xrightarrow{\varphi}F\sigma$. $\varphi|K\otimes\sigma=\varphi_1$. 在$\varphi_1$下$K\otimes\sigma\simeq K\sigma$, $K\otimes\sigma$视为$\mathrm{Im}(\alpha,\otimes)$). 因此只要证明：对$\forall\sigma\in G$. 有：$B\sigma\simeq F\sigma/K\sigma$即可. 又由$\sum(\beta e_i)a_i=\sum\beta(e_ia_i), e_i\in F, a_i\in\sigma$, ⇒$B\sigma=\beta(F\sigma)\simeq F\sigma/(F\sigma\cap K)$ (因为$\mathrm{Ker}\beta=K$). 所以

$$B\text{是T平模}\Leftrightarrow F\sigma/(F\sigma\cap K)\simeq F\sigma/K\sigma \qquad (*)$$

又由$K\sigma\subset F\sigma\cap K$，于是(*)成立当且仅当$F\sigma\cap K=K\sigma$. 从而便得：$B$是T平模的充要条件是：$F\sigma\cap K=K\sigma$ 对所有$\sigma\in G$成立. ■

命题2.8 T平模对取扩张封闭.

证明 设$0\to M'\to M\to M''\to 0$是右R模正合列. 其中M', M''是T平模. 要证M也是T平模，只要证明M^*是T内射模即可. 由假设M'^*, M''^*是T内射模，$\forall\sigma\in G$. 由$0\to\sigma\to R\to R/\sigma\to 0$正合可得以下可换图，其中行列均正合：

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Hom}(R,M''^*) & \xrightarrow{\nu} & \mathrm{Hom}(\sigma,M''^*) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow h & & \\
\mathrm{Hom}(R,M^*) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}(\sigma,M^*) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow g & & \\
\mathrm{Hom}(R,M'^*) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}(\sigma,M'^*) & \to & 0\\
\downarrow & & & & \\
0 & & & &
\end{array}$$

易证α满，从而可得M^*是T内射模. 即M是T平模. ■

§3 T 正 则 环

有了上一节关于T平模的结果，我们可以把 Von Neumann 意义下的正则环推广为T正则环.

定义3.1 设G是环R的一个左Gabriel拓扑，相应的扭论为$(\mathcal{T},\mathcal{F})$,称环$R$是左T正则的，如果每个右$R$模是T平模.

当Gabriel拓扑$G=\{$所有左理想$\}$或G为Goldie拓扑时，左T正则环就是通常意义下的正则环.

关于T正则环，我们有下面的结果：

定理3.1 设G是环R上的左Gabriel拓扑，相应的扭论为$(\mathcal{T},\mathcal{F})$．则以下条件等价：

（1） R是左T正则环．

（2） T平模对取同态象封闭．

（3） T平模构成一个（遗传）扭类．

（4） 每个循环右R模是T平模．

（5） $\forall\sigma\in G$及$\forall a\in\sigma$，$\exists a'\in\sigma$．使得：$a=aa'$．

证明 （1）⇒（2）显然．

（2）⇒（3）：应用命题2.8便得．

（3）⇒（4）：由于R是平模，当然是T平模．由（3）便得（4）．

（4）⇒（1）：设M_R是任一右R模，则有：$F\xrightarrow{\varphi}M\to 0$正合，其中$F$是自由模．设$F=\oplus R_i, R_i=(0,\cdots,0,\cdots,\underset{i}{R},0,\cdots,0)\simeq R$．$\mathrm{Ker}\varphi=K$．令：$K_i=K\cap R_i$．则$R_i/K_i=\overline{R}_i$是T平模且$K=\oplus K_i$．又由$M\simeq F/K=\oplus R_i/\oplus K_i\simeq\oplus\overline{R}_i$即：$M$是T平模．即（1）成立．

（4）⇒（5）：$\forall\sigma\in G$及$\forall a\in\sigma$．由（4）知：R/aR是个平模．$0\to\sigma\overset{l}{\hookrightarrow}R$正合．于是：$1\otimes l$：$R/aR\otimes\sigma\to R/aR\otimes R$是单射．又由$(1\otimes l)(\mathrm{T}\otimes a)=T\otimes a=T\cdot a\otimes 1=0$．因此$0=\mathrm{T}\otimes a\in R/aR\otimes\sigma$．令：$\overline{y}=y+\sigma\in R/\sigma$．$\widehat{ra}=ra+a\sigma\in\sigma/a\sigma$．由于

$$\begin{aligned} R/aR\times\sigma &\to \sigma/a\sigma \\ (\overline{y},a') &\to \widehat{ya'} \end{aligned}$$

是双线性映射．所以τ：$R/aR\otimes\sigma\to\sigma/a\sigma,\tau(\sum\overline{y}_i\otimes a_i)=\sum\widehat{y_ia_i}$是同态．又$0=\mathrm{T}\otimes a\in R/aR\otimes\sigma$．于是$0=\tau(\mathrm{T}\otimes a)=\hat{a}\in\sigma/a\sigma$．因此$\exists a'\in\sigma$．使得：$a=aa'$．

（5）⇒（4）：任给右循环R模C_R，有正合列：$0\to K\hookrightarrow R\to C\to 0$．要证$C$为T平模，只要证$K\cap R\sigma=K\sigma$对所有$\sigma\in G$成立即可．$\forall\sigma\in G$，$x\in K\cap R\sigma=K\cap\sigma$，即$x\in K$，$x\in\sigma$，由假设，$\exists a'\in\sigma$，使得：$x=xa'\in K\sigma$，于是$K\cap R\sigma\subseteq K\sigma$．从而有：$K\cap R\sigma=K\sigma$，即：$C$是T平模． ■

应用上述定理的结论及其证明过程，立刻便得：

推论3.2 如果环R是左T正则环，则G中每个左理想都是幂等的．且G中每个循环左理想是R的直和项．

证明 $\forall\sigma\in G$，$\forall a\in\sigma$．由定理3.1知：$\exists a'\in\sigma$使得：$a=aa'\in\sigma^2$，因此$\sigma=\sigma^2$．即σ幂等．假如$\sigma\in G$是循环左理想，设$\sigma=Ra$，$a\in R$．由定理3.1知：$\exists a'\in Ra$，使得：$a=aa'$．设$a'=ra$，$r\in R$．即有：$a=ara$．令$e=ra$，则：$e^2=(ra)(ra)=r(ara)=ra=e$．且$Re\hookrightarrow Ra$．又：$a=ara=ae\hookrightarrow Re$．故$Ra=Re$是$R$的直和项． ■

众所周知，正则环一定是奇异环，但反之不成立．应用定理3.1的结论，可以得到奇异环是正则环的一个等价条件．

定理3.3 环R是正则环当且仅当R是左非奇异环且对R的任一本质左理想σ，及$\forall a\in\sigma$有$a'\in\sigma$，使得：$a=aa'$．

证明 "⇒"由[1]中p224引理1.1便得．

"⇐"由于R是左非奇异环，由[1]中p149推论6.8知：R的左Groldie拓扑$=R$的稠密拓扑$=\{\sigma|\sigma$是R的左本质理想$\}$．由题设及定理3.1知：每个右R模M_R是T平模，从而M^*

是T内射模．应用[1]中p204引理2.10知：M^*是内射模．故M_R是平模．因此R是正则环．■

§4 TV环

设$(\mathcal{T},\mathcal{F})$是遗传扭论，相应的左Gabriel拓扑为$G$．对环$R$的任一真左理想$I$，$I^*$表示$R$的含有$I$的所有极大左理想的交．

定义4.1 环R称为TV环，如果每个左R单模是T内射模．

任给模M，定义：$T'(M)=\{x\in M \mid R\overline{x}\in G(M')$，其中$M'$是$M$的任一同态象，$\overline{x}$表示$x$在此同态下的象$\}$．易见$T'(M)$未必含有0元．为此定义：$T(M)=T'(M)\cup\{0\}$．易见$T(M)$是$M$的加群．但未必是子模．

对于TV环，我们有以下结论：

定理4.1 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$是遗传扭论，$G$是相应的Gabriel拓扑，则以下条件等价：

（1）R是TV环．

（2）$J(M)T(M)=0$，对所有$M\in R\text{-mod}$成立．

（3）$J(E_G(s))\cap T(E_G(s))=0$，对所有单模$s$成立．

（4）$J(E_G(s))=0$，对所有单模s成立．

（5）$\forall\sigma\in G$，及σ的任一极大左R子模K（如果有的话），有：$K^*\neq\sigma^*$．

证明 (1)⇒(2)：如果存在M使得：$J(M)\cap T(M)\neq 0$．取$0\neq x\in J(M)\cap T(M)$．应用Zorn引理，可以取子模L满足$x\notin L$，且L是满足这种性质的极大子模．则有：$0\neq\overline{x}\in M/L=M'$．设$\overline{N}$是$M'$的任一非零子模．$\overline{N}=N/L$．则$N\ni x$．于是$R\overline{x}$是$M'$的最小子模．即$R\overline{x}$是单模，且$R\overline{x}$是$M'$的本质子模．记为：$R\overline{x}\hookrightarrow M'$．由$T(M)$的定义知：$R\overline{x}\in G(M')$．由T内射包的定义知，有：$R\overline{x}\overset{*}{\hookrightarrow}M'\hookrightarrow E_G(R\overline{x})$．由于$R$是TV环，⇒$R\overline{x}$是T内射模．因此$R\overline{x}=E_G(R\overline{x})$，所以$R\overline{x}=M'=M/L$是单模．即$L$是$M$的极大子模．又：$x\in J(M)$．故$x\in L$．这与假设$x\notin L$矛盾．

(2)⇒(3)显然．

(3)⇒(4)：只要证$T(E_G(s))=E_G(s)$即可．$\forall 0\neq x\in E_G(s)$．由$s$单⇒$Rx\supset s$．且$Rx\subset G(E_G(s))$．设$M'$是$E_G(s)$的任一真同态象．则$M'\in\mathcal{T}$．⇒$R\overline{x}\in G(M')$．故有：$T(E_G(s))=E_G(s)$．

（4）⇒（1）：设s是任一单模，要证s是T内射模，即要证$s=E_G(s)$．否则$s\neq E_G(s)$．由于$J(E_G(s)=0$，⇒$E_G(s)$含有极大子模，且每个极大子模均含有s(因s是$E_G(s)$的本质子模)．⇒$J(E_G(s))\supseteq s\neq 0$．矛盾．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[dr] & \sigma \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "\exists g"] \\ & \sigma/K & \end{tikzcd}$$

(1)⇒(5)：如果存在$\sigma\in G$，及σ的极大R子模K，使得：$K^*=\sigma^*$．设$f:\sigma\to\sigma/K$是自然同态．易见σ/K是单模．由(1)，f可以扩充为$g:R\to\sigma/K$．令$h=g|_{\sigma^*}$．则$H=\mathrm{Ker}h\supseteq K$．且$H\subseteq\sigma^*=K^*$．即：$K\subseteq H\subseteq K^*$．又$(K^*)^*=K^*$．因此$H^*=\sigma^*=K^*$，令$G=\mathrm{Ker}g$，则$G$是$R$的极大左理想，且$G\cap\sigma^*=H$．即$G\supseteq H$．所以$\sigma^*=K^*=H^*\subseteq G$．即：$G\cap\sigma^*=H=\sigma^*$，故$h(\sigma^*)=0$．即：$\sigma/K=h(\sigma^*)=0$，⇒$\sigma=K$矛盾．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[dr] & \sigma \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "\exists g"] \\ & s & \end{tikzcd}$$

(5)⇒(1)：设s是任一单R模，$\forall\sigma\in G$，$f:\sigma\to s$是任一同态．要证右图可换．

(a) 如果$f=0$. 取$g=0$即可.

(b) 如果$f\neq 0$, $\mathrm{Ker}f=K$是σ的极大左R子模. 由(5)知: $K^*\neq\sigma^*$, $\Rightarrow\exists R$的极大左理想$\mathscr{M}$, 满足$K\subseteq\mathscr{M}$, $\sigma\not\subseteq\mathscr{M}$, $\Rightarrow R=\sigma+\mathscr{M}$, 又$\sigma\cap\mathscr{M}=K$(否则, $\sigma\cap\mathscr{M}=\sigma$, $\Rightarrow\sigma\subseteq\mathscr{M}$矛盾). 于是有: $R/K=\sigma/K\oplus\mathscr{M}/K$. 易见: $\bar{f}:\sigma/K\to s$是同构, 取$\bar{g}:R/K\to s$, 其中$\bar{g}|_{\sigma/K}=\bar{f}$, $\bar{g}|_{\mathscr{M}/K}=0$. 定义: $g:R\to s$, $g(r)=\bar{g}(r+K)$. 易见g定义合理, 且对$\forall a\in\sigma$, 有: $g(a)=f(a)$. 即$f=g|_{\sigma}$. 即: s是T内射模. 故得(1)成立. ■

当Gabriel拓扑$G=\{$全体左理想$\}$或G是Goldie拓扑时, TV环就是通常意义下的V环. 应用定理4.1可得:

推论4.2 $(\mathscr{T},\mathscr{F})$是遗传扭论. G是相应的Gabriel拓扑, R是TV环, 则对R的任一左理想σ有: $\sigma^*=\sigma$或$\sigma\in G$.

证明 若存在R的左理想σ适合$\sigma\neq\sigma^*$且$\sigma\in G$. 则由于$R/\sigma\in\mathscr{T}$, 有: $T(R/\sigma)=R/\sigma$. 由定理4.1(2)知: $J(R/\sigma)\cap T(R/\sigma)=J(R/\sigma)=0$. 即: $\sigma=\sigma^*$. 从而得出矛盾. ■

推论4.3 $(\mathscr{T},\mathscr{F})$是遗传扭论, G是相应的Gabriel拓扑, 如果R是TV环, 则G中每个左理想都是幂等的.

证明 $\forall\sigma\in G$. 由[1]中p147引理5.3知: $\sigma^2\in G$. 由推论4.2知: $\sigma^*=\sigma$, ${\sigma^2}^*=\sigma^2$. 如果$\sigma^2\neq\sigma$, 则存在R的极大左理想$\mathscr{M}$满足$\sigma\not\subseteq\mathscr{M}$, $\sigma^2\subseteq\mathscr{M}$, $\Rightarrow R=\sigma+\mathscr{M}$. 于是$\exists a\in\sigma$, $\exists m\in\mathscr{M}$, 使得: $1=a+m$, $\Rightarrow a=a^2+am\in\mathscr{M}$. 即: $1\in\mathscr{M}$. 矛盾. 故必有$\sigma=\sigma^2$. ■

众所周知, 对可换环R, R是V环当且仅当R是正则环, 但对于TV环与T正则环是否也有类似的性质, 有待于进一步地研究.

本文是在我的导师吴品三教授的热情指导和帮助下完成的, 作者在此表示衷心地感谢.

参 考 文 献

[1] B. Stenström, Rings of quotients, New York, 1975.
[2] F. Kash, Modules and Rings, New York, 1972.
[3] Rotman, An Zntroduction to Homological Algebra, New York. 1979.
[4] G. O. Michler and OE. Villamayor, J. Algebra. 25(1973), 185—201.
[5] K. Varadarajan, Comm. in Algebra, 14(3), 455—467 (1986).
[6] Roger Yue, Che Ming, J. Algebra. 62, 13—24 (1980).
[7] J. L. Garlia, Comm. in Algebra. 13(1). 59—83. (1985).

Regular Rings and *V*-Rings Relative to Torsion Theory

Zhang Shunhua

Abstract

In this paper, we generalize flat modules, regular rings and V-rings to the situation of a hereditary torsion theory, that a ring R is regular if and only if R is a left nonsingular ring and for every essential left ideal σ of R, and for every element $a\in\sigma$ there exists a element $a'\in\sigma$, such that $a=aa'$. (theorem 3.3).