第26卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0517-08 **文献标识码**: **A**

一类整函数系数微分方程解的复振荡

江良英 [1]， 陈宗煊 [2]
(1. 江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330037; 2. 华南师范大学数学系，广东 广州 510631)
(E-mail: liangying1231@163.com)

摘 要: 本文研究了微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F\ (k\geq 2)$ 解的增长级和零点收敛指数，其中 $A_j=B_je^{P_j}, j=0,1,\cdots,k-1, B_j(z)$ 为整函数， $P_j(z)$ 为多项式， $\sigma(B_j)<\deg P_j$.

关键词: 微分方程；整函数；增长级；零点；收敛指数.
MSC(2000): 30D05, 30D35
中图分类: O174.52, O175.12

1 引言与结果

本文使用值分布的标准记号 [1,2], 用 $\lambda(f),\bar{\lambda}(f)$ 分别表示亚纯函数 f 的零点及不同零点的收敛指数， $\sigma(f)$ 表示 f 的增长级， $\deg P$ 表示多项式 $P(z)$ 的次数.

2002 年曹春雷和陈宗煊在 [3] 中，在允许方程有几个系数的级是相等的情况下，证明方程的所有超越解的级为无穷，即

定理 A 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是不全恒等于零的有限级整函数， $k\geq 2$, 若对每个 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1)$, 如果 $A_j\not\equiv 0$, 有 $\lambda(A_j)<\sigma(A_j)$, 且对 $A_i\not\equiv 0, A_j\not\equiv 0(i\neq j)$, 有 $\sigma(A_i/A_j)=\max\{\sigma(A_i),\sigma(A_j)\}$, 那么微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0 \tag{1.1}$$

的任一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$. 进一步，如果按 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 的顺序，第一个不恒等于零的系数为 A_j, 则 (1.1) 最多出现次数不超过 $j-1$ 的多项式解，其余解均为无穷级；若 $A_0\not\equiv 0$, 则 (1.1) 的任一非零解均为无穷级.

定理 B 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F\not\equiv 0$ 为有限级整函数， $k\geq 2, A_0,\cdots,A_{k-1}$ 不全恒等于零，若对 $A_i\not\equiv 0, A_j\not\equiv 0(i,j\in\{0,1,\cdots,k-1\})$, 有 $\lambda(A_i)<\sigma(A_i)$ 及 $\sigma(A_i/A_j)=\max\{\sigma(A_i),(A_j)\}(i\neq j)$, 那么对于非齐次线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F. \tag{1.2}$$

(a) 如果按 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 的顺序，第一个不恒等于零的系数为 $A_j(j\neq 0)$, 且 (1.2) 存在有限级解 f_1, 则 (1.2) 的任一有限级解 f_2 具有形式 $f_2=f_1+\tilde{P}$, 其中 $\tilde{P}(z)$ 为次数不超过 $j-1$ 的多项式，从而 $\sigma(f_2)=\sigma(f_1)$.

(b) 如果 $A_0\not\equiv 0$ ，则 (1.2) 至多有一个可能的有限级例外解 f_0, 其它所有解 f 满足 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

收稿日期: 2004-07-05
基金项目: 国家自然科学基金 (10161006), 广东省自然科学基金 (04010360)

(c) 如果 (1.2) 存在有限级解 f_0, 那么 f_0 满足

$$\sigma(f_0)\le \max\{\sigma(A_j),\sigma(F),\bar{\lambda}(f_0): j=0,1,\cdots,k-1\}. \tag{1.3}$$

在本文中，将定理 A 中方程的系数类型推广到更一般的情况，得到下面两个结果.

定理 1 假设 $A_j(z)=B_j(z)e^{P_j(z)}(j=0,1,\cdots,k-1)$,$k\ge 2$, 其中 $B_j(z)$ 为整函数， $P_j(z)$ 为多项式，次数 $\deg P_j(z)=d_j$, 若存在 s 和 l, 满足 $s<l, B_sB_l\not\equiv 0$, $\deg P_s=\deg P_l=d$, $\deg(P_s-P_l)=m<d(m\ge 1)$, 且 $\sigma(B_s)<m,\sigma(B_l)<m$, 当 $B_j\not\equiv 0$ 时有 $\sigma(B_j)<d_j$, 且对 $B_i\not\equiv 0, B_j\not\equiv 0$ $(i\ne j, i,j$ 不同时取 s 和 $l)$, 有 $\deg(P_i-P_j)=\max\{d_i,d_j\}$.

则微分方程 (1.1) 的任一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$, 进一步，如果按 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 的顺序，第一个不恒等于零的系数为 A_j, 则 (1.1) 最多出现次数不超过 $j-1$ 的多项式解，其余解均为无穷级；若 $A_0\not\equiv 0$, 则 (1.1) 的任一非零解均为无穷级.

定理 2 假设 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 如定理 1 中所设， $k\ge 2$, $F\not\equiv 0$ 为有限级整函数，那么，对于非齐次线性微分方程 (1.2) 有

(a) 如果按 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 的顺序，第一个不恒等于零的系数为 $A_j(j\ne 0)$, 且 (1.2) 存在有限级解 f_1, 则 (1.2) 的任一有限级解 f_2 具有形式 $f_2=f_1+P$, 其中 $P(z)$ 为次数不超过 $j-1$ 的多项式，从而 $\sigma(f_2)=\sigma(f_1)$.

(b) 如果 $A_0\not\equiv 0$, 则 (1.2) 至多有一个可能的有限级例外解 f_0, 其它所有解 f 满足 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

(c) 如果 (1.2) 存在有限级解 f_0, 那么 f_0 满足 (1.3).

2 引 理

在证明定理之前，引进符号 $\delta(P,\theta)$, 设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^n+\cdots(\alpha,\beta\in R)$ 为非常数多项式，记 $\delta(P,\theta)=\alpha\cos n\theta-\beta\sin n\theta, \theta\in[0,2\pi)$, 为了证明定理，引用如下引理

引理 1[4] 设 $w(z)$ 是开平面上有限 ρ 级超越整函数， $\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是不同整数对组成的有限集，满足 $k_i>j_i\ge 0, i=1,\cdots,m$, 又设 $\varepsilon>0$ 是给定的常数，则存在零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$, 使得如果 $\psi_0\in[0,2\pi)\backslash E_1$, 那么存在常数 $R_0=R_0(\psi_0)>0$, 对满足 $\arg z=\psi_0$ 及 $|z|\ge R_0$ 的所有 z 及所有 $(k,j)\in\Gamma$, 都有

$$|w^{(k)}(z)/w^{(j)}(z)|\le |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

引理 2[3] 设 $P(z)$ 是次数为 n 的非常数多项式， $w(z)\not\equiv 0$ 是亚纯函数，其级 $\sigma(w)<n$, 令 $g=we^P$, 则存在零测度集 $H_1\subseteq[0,2\pi)$, 对每一 $\theta\in[0,2\pi)\backslash(H_1\cup H_2)$, 及给定常数 $\varepsilon: 0<\varepsilon<1$, 当 $r>r_0(\theta,\varepsilon)$ 时，有

(i) 如果 $\delta(P,\theta)<0$, 则 $\exp((1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n)\le|g(re^{i\theta})|\le\exp((1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n)$;

(ii) 如果 $\delta(P,\theta)>0$, 则 $\exp((1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n)\le|g(re^{i\theta})|\le\exp((1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n)$.

其中 $H_2=\{\theta:\delta(P,\theta)=0, 0\le\theta<2\pi\}$ 是有限集.

引理 3[6] 设 $f(z)$ 为整函数，如果 $|f^{(k)}(z)|$ 在某条射线 $\arg z=\theta$ 上无界，则存在无穷点列 $z_n=r_ne^{i\theta}(n=1,2,\cdots)$, 当 $r_n\to\infty$ 时， $f^{(k)}(z_n)\to\infty$ 且

$$|f^{(j)}(z_n)/f^{(k)}(z_n)|\le|z_n|^{k-j}(1+o(1))\quad(j=0,1,\cdots,k-1).$$

引理 4[6] 假设 $f(z)$ 为整函数，其级 $\sigma(f)=\sigma<\infty$, 若存在零测度集 $E\subset[0,2\pi)$, 对任意射线 $\arg z=\theta_0\in[0,2\pi)\backslash E$, 有 $|f(re^{i\theta_0})|\le Mr^k$ ($M=M(\theta_0)>0$ 是常数， $k(>0)$ 为与 θ_0 无关的常数), 则 $f(z)$ 是次数不超过 k 的多项式.

引理 5[5, p30] 设 $n\ge1, P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是次数分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的非常数多项式，满足当 $i\ne j$ 时， $\deg(P_i-P_j)=\max\{d_i,d_j\}$, 令 $A(z)=\sum_{j=1}^{n}B_j(z)e^{P_j(z)}$, 其中 $B_j(z)$ 是整函数, $B_j(z)\not\equiv0,\sigma(B_j)<d_j$, 则 $\sigma(A)=\max_{1\le j\le n}\{d_j\}$.

引理 6 设 $n\ge1,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是非常数多项式，次数 $\deg P_j=d_j, j=1,\cdots,n$, 若存在 $s,l\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $\deg P_s=\deg P_l=d_0$, $\deg(P_s-P_l)=m<d_0(m\ge1)$, 并假设 $i,j(\ne i)\in\{1,2,\cdots,n\}$, 满足当 i,j 不同时取 s 和 l 时， $\deg(P_i-P_j)=\max\{d_i,d_j\}$, 令 $A(z)=\sum_{j=1}^{n}B_j(z)e^{P_j(z)}$, 其中 $B_j(z)$ 是整函数，当 $B_j(z)\not\equiv0$ 时， $\sigma(B_j)<d_j$, 且 $\sigma(B_s)<m,\sigma(B_l)<m,B_sB_l\not\equiv0$, 则 $\sigma(A)=\max_{1\le j\le n}\{d_j\}$.

证明 因 $B_sB_l\not\equiv0$, 则

$$B_se^{P_s}+B_le^{P_l}=B_se^{P_s}(1+\frac{B_l}{B_s}e^{P_l-P_s}).$$

由 $\sigma(B_l/B_s)\le\max\{\sigma(B_s),\sigma(B_l)\}<m$, $\deg(P_s-P_l)=m$, 有 $1+\frac{B_l}{B_s}e^{P_l-P_s}\not\equiv0$ 且 $\sigma(1+\frac{B_l}{B_s}e^{P_l-P_s})=m$.

不妨设 $B_se^{P_s}=B_s'e^{a_sz^{d_0}}$,$B_s'$ 为整函数且 $\sigma(B_s')<d_0$. 令 $B_0=B_s'(1+\frac{B_l}{B_s}e^{P_l-P_s})$, 于是有 $\sigma(B_0)\le\max\{\sigma(B_s'),m\}<d_0$, 令 $P_0(z)=a_sz^{d_0}$ ，则 $B_0,P_0,B_j,P_j,j(\ne s,l)\in\{1,\cdots,n\}$ 满足引理 5 的假设，因此对 $A=B_0e^{P_0}+\sum_{j\ne s,l}B_je^{P_j}$, 有 $\sigma(A)=\max_{j\ne s,l}\{d_0,d_j\}$. 又因 $A=\sum_{j=1}^{n}B_j(z)e^{P_j(z)}$, 所以其级 $\sigma(A)=\max_{1\le j\le n}\{d_j\}$.

引理 7 设 $n\ge2,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是次数分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的非常数多项式, 满足当 $i\ne j$ 时，$\deg(P_i-P_j)=\max\{d_i,d_j\}$. 令 $g_j(z)=B_j(z)e^{P_j(z)}$, 其中 $B_j(z)\not\equiv0$ 是整函数, 其级 $\sigma(B_j)<d_j, j=1,2,\cdots,n$, 则存在零测度集 $H_1\subseteq[0,2\pi)$, 对 $\theta_0\in[0,2\pi)\backslash(H_1\cup H_2)$, 如果 $\delta(P_j,\theta_0)(j=1,2,\cdots,n)$ 不全小于零，则存在某个 $k=k(\theta_0)\in\{1,2,\cdots,n\}$, 满足 $\delta(P_k,\theta_0)>0$ 及对任意给定的 $M\ge0$, 当 $z=re^{i\theta_0}$, $r\to\infty$ 时，对 $j\ne k$, $|g_j(z)z^M/g_k(z)|\to0$. 其中 $H_2=\{\theta:\delta(P_j,\theta)=0$ 或 $\delta(P_i,\theta)=\delta(P_j,\theta), j,i=1,2,\cdots,n, 0\le\theta<2\pi\}$ 是有限集.

证明 对任意给定的 $M>0$, 令 $g_j^*(z)=g_j(z)z^M$ $(j=1,\cdots,n)$. 因为 $g_j(z)=B_j(z)e^{P_j(z)}$, 且 $\sigma(B_j)<d_j$, 则 $g_j^*(z)=z^MB_j(z)e^{P_j(z)}=B_j^*(z)e^{P_j(z)}$, 其中 $B_j^*(z)=z^MB_j(z)$, 显然 $\sigma(B_j^*)=\sigma(B_j)<d_j$.

使用归纳法证明. 当 $n=2$ 时，如果 $\theta_0\in[0,2\pi)\backslash(H_1\cup H_2)$ 时， $\delta(P_1,\theta_0),\delta(P_2,\theta_0)$ 不全小于零，那么不失一般性，可设 $\delta(P_1,\theta_0)>0>\delta(P_2,\theta_0)$ 或 $\delta(P_1,\theta_0)>\delta(P_2,\theta_0)>0$, 则由引理 2, 这两种情况都有 $|g_2^*(re^{i\theta_0})/g_1(re^{i\theta_0})|\to0$.

现设当 $n=m\ge2$ 时结论成立, 即存在某个 $k=k(\theta_0)\in\{1,\cdots,m\}$, 当 $j\ne k, j=1,\cdots,m$ 及 $r\to\infty$ 时，有 $\delta(P_k,\theta_0)>0$ 且 $|g_j^*(re^{i\theta_0})/g_k(re^{i\theta_0})|\to0$.

现证 $n=m+1$ 时结论也成立，因 $\delta(P_{m+1},\theta_0)\ne0$, 对其分两种情况证明.

情况 (i). 若 $\delta(P_{m+1},\theta_0)<0$, 则对 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$, 由引理 2 知

$$|g_{m+1}^*(re^{i\theta_0})|<\exp(\frac{1}{2}\delta(P_{m+1},\theta_0)r^{d_{m+1}}),$$

$$|g_k(re^{i\theta_0})|>\exp(\frac{1}{2}\delta(P_k,\theta_0)r^{d_k}).$$

从而当 $r\to\infty$ 时

$$|g^*_{m+1}(re^{i\theta_0})/g_k(re^{i\theta_0})|<\exp(\frac{1}{2}\delta(P_{m+1},\theta_0)r^{d_{m+1}}-\frac{1}{2}\delta(P_k,\theta_0)r^{d_k})\to 0.$$

情况 (ii). 若 $\delta(P_{m+1},\theta_0)>0$, 如果 $d_{m+1}\neq d_k$, 不妨设 $d_{m+1}>d_k(d_k>d_{m+1}$ 可类似证明), 则由引理 2, 对任意给定的 $\varepsilon_2(0<2\varepsilon_2<1)$, 当 r 充分大时

$$|g_{m+1}(re^{i\theta_0})|>\exp(\frac{1}{2}\delta(P_{m+1},\theta_0)r^{d_{m+1}})$$

和

$$|g^*_k(re^{i\theta_0})|\leq\exp(r^{d_k+\varepsilon_2}),$$

于是当 $r\to\infty$ 时

$$|g^*_k(re^{i\theta_0})/g_{m+1}(re^{i\theta_0})|<\exp(r^{d_k+\varepsilon_2}-\frac{1}{2}\delta(P_{m+1},\theta_0)r^{d_{m+1}})\to 0.$$

从而有

$$|g_k(re^{i\theta_0})/g_{m+1}(re^{i\theta_0})|\to 0(r\to\infty).$$

若 $j\neq k,1\leq j\leq m$, 由归纳假设 $|g^*_j(re^{i\theta_0})/g_k(re^{i\theta_0})|\to 0(r\to\infty)$, 从而

$$|g^*_j(re^{i\theta_0})/g_{m+1}(re^{i\theta_0})|=|g^*_j/g_k|.|g_k/g_{m+1}|\to 0(r\to\infty).$$

如果 $d_{m+1}=d_k$, 注意到 $\delta(P_{m+1},\theta_0)\neq\delta(P_k,\theta_0)$, 不妨设 $\delta(P_{m+1},\theta_0)>\delta(P_k,\theta_0)$ ($\delta(P_k,\theta_0)>\delta(P_{m+1},\theta_0)$ 可类似证明). 由引理 2, 对任意给定的 $\varepsilon_3(0<3\varepsilon_3<\frac{\delta(P_{m+1},\theta_0)-\delta(P_k,\theta_0)}{\delta(P_{m+1},\theta_0)})$, 当 r 充分大时有

$$|g_{m+1}(re^{i\theta_0})|\geq\exp((1-\varepsilon_3)\delta(P_{m+1},\theta_0)r^{d_{m+1}}),$$
$$|g^*_k(re^{i\theta_0})|\leq\exp((1+\varepsilon_3)\delta(P_k,\theta_0)r^{d_k}).$$

因而当 $r\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}|g^*_k(re^{i\theta_0})/g_{m+1}(re^{i\theta_0})|&\leq\exp((1+\varepsilon_3)\delta(P_k,\theta_0)r^{d_k}-(1-\varepsilon_3)\delta(P_{m+1},\theta_0)r^{d_{m+1}})\\&<\exp\{\frac{1}{3}[\delta(P_k,\theta_0)-\delta(P_{m+1},\theta_0)]r^{d_{m+1}}\}\to 0.\end{aligned}$$

若 $j\neq k,1\leq j\leq m$, 使用类似于上面的方法可知, 当 $r\to\infty$ 时

$$|g^*_j(re^{i\theta_0})/g_{m+1}(re^{i\theta_0})|\to 0.$$

引理 7 证完.

引理 8[5, p168] 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F\not\equiv 0$ 是整函数, f 满足微分方程 (1.2), 且

$$\max\{\sigma(F),\sigma(A_j):j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma(f)=\sigma(0<\sigma\leq\infty),$$

那么 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)$.

3 定理 1 的证明

由复域微分方程的基本理论可知方程 (1.1) 的任一解 f 均为整函数. 下面证明方程 (1.1) 的任一超越解 f 必为无穷级, 如若不然, 假设 $\sigma(f)=\sigma<+\infty$. 由引理 1, 对任给的 $\varepsilon_0(0<\varepsilon_0<1)$,

存在线测度为零的集合 $E_1 \subset [0,2\pi)$, 如果 $\varphi_0 \in [0,2\pi)\backslash E_1$, 则存在 $R_0 > 1$, 对于 $\arg z = \varphi_0, |z| > R_0$ 有

$$|f^{(j)}(z)/f^{(i)}(z)| \le |z|^{k\sigma}, \quad k \ge j > i \ge 0. \tag{3.1}$$

不妨设 $B_0, \cdots, B_{k-1}$ 全不恒等于零， $B_0, \cdots, B_{k-1}$ 不全恒等于零类似可证．记 $E_2 = \{\theta : \delta(P_j, \theta_0) = 0, j = 0, 1, \cdots, k-1, 0 \le \theta < 2\pi\} \cup \{\theta : \delta(P_j - P_i, \theta_0) = 0, 0 \le i < j \le k-1, 0 \le \theta < 2\pi\}$, 则 E_2 为有限集，设 $E_3 \subseteq [0,2\pi)$ 为运用引理 7 时存在的零测度例外集.

现在任取射线 $\arg z = \varphi_0 \in [0,2\pi)\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, 令 $\delta_i = \delta(P_i, \varphi_0), i = 0, 1, \cdots, k-1$, 因 $\delta_s = \delta_l$, 删掉 δ_l, 即对 $\delta_0, \cdots, \delta_s, \cdots, \delta_{l-1}, \delta_{l+1}, \cdots, \delta_{k-1}$ 分成两种情况讨论.

情况 (一). 若 $\delta_0, \cdots, \delta_s, \cdots, \delta_{l-1}, \delta_{l+1}, \cdots, \delta_{k-1}$ 不全小于零. 因为 $A_0, \cdots, A_s, \cdots, A_{l-1}, A_{l+1}, \cdots, A_{k-1}$ 满足引理 7 的假设，于是存在某个 $t = t(\varphi_0) \in \{0, \cdots, s, \cdots, l-1, l+1, \cdots, k-1\}$, 满足 $\delta_t > 0$, 以及对任意给定的 $M \ge 0$, 对 $z = re^{i\varphi_0}$, 当 $j(\ne t) \in \{0, \cdots, s, \cdots, l-1, l+1, \cdots, \cdots, k-1\}$ 及 $r \to \infty$ 时

$$|A_j(z)z^M/A_t(z)| \to 0. \tag{3.2}$$

由于 $\delta_t > 0$, 则由引理 2, 知对任给的 $\varepsilon(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$, 当 r 充分大时

$$|A_t(re^{i\varphi_0})| \ge \exp((1-\varepsilon)\delta_t r^{d_t}). \tag{3.3}$$

对于 δ_t, 分成如下两种子情况讨论：

子情况 (i). 如果 $t \ne s$, 由 $\delta_s = \delta_l$ 和 (3.2) 知

$$|A_l(re^{i\varphi_0})r^M/A_t(re^{i\varphi_0})| \to 0(r \to \infty). \tag{3.4}$$

下面证明 $|f^{(t)}(z)|$ 在射线 $\arg z = \varphi_0$ 上是有界的．若不然，由引理 3 可知存在点列 $z_n = r_n e^{i\varphi_0}$, 当 $r_n \to \infty$ 时， $f^{(t)}(z_n) \to \infty$ 且

$$|f^{(j)}(z_n)/f^{(t)}(z_n)| \le |z_n|^{t-j}(1+o(1)), \quad j = 0, 1, \cdots, t-1. \tag{3.5}$$

由于 $f^{(t)} \not\equiv 0$, 由方程 (1.1) 得到

$$\begin{aligned} |A_t(z_n)| \le & |f^{(k)}(z_n)/f^{(t)}(z_n)| + |A_{k-1}(z_n)||f^{(k-1)}(z_n)/f^{(t)}(z_n)| + \cdots + \\ & |A_{t+1}(z_n)||f^{(t+1)}(z_n)/f^{(t)}(z_n)| + |A_{t-1}(z_n)||f^{(t-1)}(z_n)/f^{(t)}(z_n)| + \cdots + \\ & |A_0(z_n)||f(z_n)/f^{(t)}(z_n)|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

由 (3.1)-(3.6) 可得

$$|A_t(z_n)| \le |z_n|^{M_1} + \sum_{j \ne t} |A_j(z_n) z_n^{M_1}|,$$

其中 M_1 为某正常数，因而

$$1 \le \frac{|z_n|^{M_1} + \sum_{j \ne t} |A_j(z_n) z_n^{M_1}|}{|A_t(z_n)|} \to 0(r_n \to \infty).$$

显然上式是矛盾的，故 $|f^{(t)}(z)|$ 在射线 $\arg z = \varphi_0 \in [0,2\pi)\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ 上是有界的.

设 $|f^{(t)}(re^{i\varphi_0})| \le M_2$ ($M_2 > 0$ 是某常数), 取积分路线 $c' = \{z : \arg z = \varphi_0, 0 \le |z| \le r\}$, 则当 $z = re^{i\varphi_0}$ 充分的大时

$$|f^{(t-1)}(z)| \le |f^{(t-1)}(0)| + |\int_0^z f^{(t)}(u)\mathrm{d}u| \le M_2'|z| \quad (M_2' > 0 \text{ 是常数}).$$

逐次积分可知，当 $z = re^{i\varphi_0}$ 充分大时，有 $|f(z)| \le M'|z|^t \le M'|z|^k$ ($M' > 0$ 是常数).

子情况 (ii). 如果 $t = s$ ，则 $\delta_t = \delta_s = \delta_l > 0$, 于是

$$|A_l(re^{i\varphi_0})| \ge \exp((1-\varepsilon)\delta_l r^{d_l}) = \exp((1-\varepsilon)\delta_s r^{d_s}).$$

因 $\delta(P_s - P_l, \varphi_0) \ne 0$ ，若 $\delta(P_s - P_l, \varphi_0) > 0$ ，则 $\delta(P_l - P_s, \varphi_0) < 0$.

下面证明 $|f^{(s)}(z)|$ 在射线 $\arg z = \varphi_0$ 上有界，若不然，由引理 6 可知存在点列 $z_n' = r_n' e^{i\varphi_0}$, 当 $r_n' \to \infty$ 时， $f^{(s)}(z_n') \to \infty$ 且

$$|f^{(j)}(z_n')/f^{(s)}(z_n')| \le |z_n'|^{s-j}(1+o(1)), \quad j = 0, 1, \cdots, s-1. \tag{3.7}$$

由于 $f^{(t)} \not\equiv 0$, 由方程 (1.1) 得

$$\begin{aligned}|A_s(z_n') + A_l(z_n')\frac{f^{(l)}(z_n')}{f^{(s)}(z_n')}| \le\ & |f^{(k)}(z_n')/f^{(s)}(z_n')| + \cdots + |A_{l+1}(z_n')||f^{(l+1)}(z_n')/f^{(s)}(z_n')| + \\ & |A_{l-1}(z_n')||f^{(l-1)}(z_n')/f^{(s)}(z_n')| + \cdots + |A_{s+1}(z_n')||f^{(s+1)}(z_n')/f^{(s)}(z_n')| + \\ & |A_{s-1}(z_n')||f^{(s-1)}(z_n')/f^{(s)}(z_n')| + \cdots + |A_0(z_n')||f(z_n')/f^{(s)}(z_n')|.\end{aligned} \tag{3.8}$$

又由引理 2, 当 r_n' 充分大时，对上述的 ε, 有

$$\begin{aligned}|A_l(z_n')/A_s(z_n')||z_n'|^{M_3} &= |B_l(z_n')/B_s(z_n')||e^{P_l(z_n') - P_s(z_n')}||z_n'|^{M_3} \\ &\le \exp((1-\varepsilon)\delta(P_l - P_s, \varphi_0)|z_n'|^m)|z_n'|^{M_3} \\ &< \exp((1-2\varepsilon)\delta(P_l - P_s, \varphi_0)|z_n'|^m) \to 0 (r_n' \to \infty),\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中 M_3 为正常数. 由 (3.1) 和 (3.9), 当 r_n' 充分大时得到

$$\begin{aligned}|A_s(z_n') + A_l(z_n')\frac{f^{(l)}(z_n')}{f^{(s)}(z_n')}| &\ge |A_s(z_n')|(1 - |\frac{A_l(z_n')}{A_s(z_n')}|.|\frac{f^{(l)}(z_n')}{f^{(s)}(z_n')}|) \\ &\ge |A_s(z_n')|(1 - \exp((1-\varepsilon)\delta(P_l - P_s, \varphi_0)|z_n'|^m)|z_n'|^{M_3}) \ge \frac{1}{2}|A_s(z_n')|.\end{aligned} \tag{3.10}$$

当 r_n' 充分大时，由 (3.1)–(3.3),(3.7),(3.8) 及 (3.10) 可得

$$\frac{1}{2}|A_s(z_n')| \le |z_n'|^{M_4} + \sum_{j \ne s,l} |A_j(z_n')||z_n'|^{M_4} \quad (M_4 \text{ 为正常数}),$$

于是当 $r_n' \to \infty$ 时

$$\frac{1}{2} \le \frac{|z_n'|^{M_4} + \sum_{j \ne s,l} |A_j(z_n')||z_n'|^{M_4}}{|A_s(z_n')|} \to 0.$$

上式显然是错误的, 所以 $|f^{(s)}(z)|$ 在 $\arg z = \varphi_0$ 上有界, 类似子情况 (i) 的推导可知, 当 $z = re^{i\varphi_0}$ 充分大时有 $|f(z)| \le M''|z|^k$ ($M'' > 0$ 为常数).

若 $\delta(P_s-P_l,\varphi_0)<0$, 只需在上面的推导过程中，将 s 用 l 代替，类似可证得 $|f^{(l)}(z)|$ 在射线 $\arg z=\varphi_0$ 上有界，由相同的理由知当 $z=re^{i\varphi_0}$ 充分大时，有 $|f(z)|\le M'''|z|^k$ ($M'''>0$ 为常数).

情况 (二). 若 $\delta_0,\cdots,\delta_s,\cdots,\delta_{l-1},\delta_{l+1},\cdots,\delta_{k-1}$ 全小于零. 则 $\delta(P_j,\varphi_0)<0(j=0,1,\cdots,k-1)$. 令 $\delta'=\max_{0\le j\le k-1}\{\delta(P_j,\varphi_0)\}$, $d'=\min_{0\le j\le k-1}\{d_j\}$, 则 $\delta'<0,d'>0$. 由引理 2, 对任给的 $\varepsilon'(0<\varepsilon'<1/2)$ 有

$$|A_j(re^{i\varphi_0})|\le\exp((1-\varepsilon')\delta(P_j,\varphi_0)r^{d_j})\le\exp((1-\varepsilon')\delta'r^{d'}). \tag{3.11}$$

若 $|f^{(k)}(z)|$ 在射线 $\arg z=\varphi_0\in[0,2\pi)\backslash(E_1\cup E_2\cup E_3)$ 上是无界的，由引理 3, 则存在点列 $z_n''=r_n''e^{i\varphi_0}$, 当 $r_n''\to\infty$ 时， $f^{(k)}(z_n'')\to\infty$ 且

$$|f^{(j)}(z_n'')/f^{(k)}(z_n'')|\le|z_n''|^{k-j}(1+o(1)),\quad j=0,1,\cdots,k-1. \tag{3.12}$$

因 $f^{(k)}\not\equiv0$, 则由方程 (1.1) 及 (3.11), (3.12) 可得

$$\begin{aligned}1&\le|A_{k-1}(z_n'')||f^{(k-1)}(z_n'')/f^{(k)}(z_n'')|+\cdots+|A_0(z_n'')||f(z_n'')/f^{(k)}(z_n'')|\\&\le\exp((1-\varepsilon')\delta'|z_n''|^{d'})|z_n''|^{M_0}<\exp((1-2\varepsilon')\delta'|z_n''|^{d'})\to0\ \ (r''\to\infty).\end{aligned}$$

其中 M_0 为正常数, 显然上式矛盾. 故 $|f^{(k)}(z)|$ 在射线 $\arg z=\varphi_0$ 上有界, 从而可知当 $z=re^{i\varphi_0}$ 充分大时有 $|f(z)|\le M_0'|z|^k$ ($M_0'>0$ 为常数).

综合情况 (一), (二) 可知，在任意射线 $\arg z=\varphi_0\in[0,2\pi)\backslash(E_1\cup E_2\cup E_3)$ 上，当 $|z|=r\ge r_0(\varphi_0)>0$ 时有 $|f(z)|\le M(\varphi_0)|z|^k$ ($M(\varphi_0)>0$ 为仅与 φ_0 有关的常数), 则由引理 4 可知 f 为次数不超过 k 的多项式，这与假设矛盾，因此方程 (1.1) 的任一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$.

进一步，如果按 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 的顺序，第一个不恒等于零的系数为 A_j, 若方程 (1.1) 存在多项式解 $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_0(a_n\ne0)$, 如果 $n\ge k$, 则由引理 6 知 (1.1) 左边的增长级为 $\max_{0\le i\le k}\{d_i\}>0$ (若 $A_i\equiv0$, 则令 $d_i=0$, 下同); 如果 $j\le n<k$, 则由引理 6 知 (1.1) 左边的增长级为 $\max_{j\le i\le n}\{d_i\}>0$, 这与方程 (1.1) 矛盾，故方程 (1.1) 最多出现次数不超过 $j-1$ 的多项式解，又由前面的证明知其余解必为无穷级. 若 $A_0\not\equiv0$, 显然方程 (1.1) 的非零解 f 是超越的，且 $\sigma(f)=\infty$.

4 定理 2 的证明

首先由复域微分方程的基本理论可知方程 (1.2) 的任一解 f 均为整函数.

(a) 如果 (1.2) 存在有限级解 f_1, 若 f_2 为 (1.2) 的另一有限级解，则 $\sigma(f_2-f_1)<\infty$, 又因 f_2-f_1 为对应齐次方程 (1.1) 的解，由定理 1 可知 f_2-f_1 为次数不超过 $j-1$ 的多项式解，于是 $f_2=f_1+P$, 其中 $P(z)$ 是次数不超过 $j-1$ 的多项式，从而 $\sigma(f_2)=\sigma(f_1)$.

(b) 由定理 1 和 (a) 可知， (1.2) 至多有一个可能的有限级例外解 f_0. 若 f 为 (1.2) 的无穷级解，则由引理 8 知 $\bar\lambda(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

(c) 如果 (1.2) 存在有限级解 f_0, 且 $f_0\not\equiv0$, 由方程 (1.2) 得

$$\frac{1}{f_0}=\frac{1}{F}(\frac{f_0^{(k)}}{f_0}+A_{k-1}\frac{f_0^{(k-1)}}{f_0}+\cdots+A_0). \tag{4.1}$$

若 z_0 为 f_0 的 $\alpha(>k)$ 阶零点，则 z_0 必为 F 的 $\alpha-k$ 阶零点，从而

$$n(r,1/f_0)\le k\bar{n}(r,1/f_0)+n(r,1/F),$$

$$N(r,1/f_0)\le k\bar{N}(r,1/f_0)+N(r,1/F). \tag{4.2}$$

因 $\sigma(f_0)<\infty$, 由 (4.1) 及对数导数引理，可得

$$m(r,1/f_0)\le m(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,A_j)+O(\log r). \tag{4.3}$$

则由 (4.2) 及 (4.3) 得

$$T(r,f_0)=T(r,1/f_0)+O(1)\le k\bar{N}(r,1/f_0)+T(r,F)+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,A_j)+O(\log r).$$

所以 $\sigma(f_0)\le\max\{\bar{\lambda}(f_0),\sigma(F),\sigma(A_j),j=0,1,\cdots,k-1\}$.

参考文献:

[1] HAYMAN W K. *Meromorphic Functions* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社， 1982.
YANG Le. *Value Distribution Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Chinese)

[3] 曹春雷，陈宗煊. 一类整函数系数线性微分方程解的增长级和零点 [J]. 应用数学学报， 2002, **25** (1): 123–131.
CAO Chun-lei, CHEN Zong-xuan. *On the orders and zeros of the solutions of certain linear differential equations with entire coefficients* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 2002, **25**(1): 123–131. (in Chinese)

[4] GUNDERSEN G. *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates* [J]. J. London Math. Soc., 1988, **37**(2): 88–104.

[5] 高仕安，陈宗煊，陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉：华中理工大学出版社， 1998.
GAO Shi-an, CHEN Zong-xuan, CHEN Te-wei. *The Complex Oscillation Theory of Linear Differential Equations* [M]. Wuhan: Huazhong Univ. Sci. Tech. Press, 1998. (in Chinese)

[6] CHEN Zong-xuan. *On the hyper order of solutions of higher order differential* [J]. Chinese Ann. Math. Ser.B, 2003, **24**(4): 501–508.

The Complex Oscillation of a Class of Linear Differential Equation with Entire Coefficients

JIANG Liang-ying[1], *CHEN Zong-xuan*[2]

(1. School of Math. & Infor., Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China;
2. Dept. of Math., South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: This paper deals with the orders and zeros of the solutions of the differential equation

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F,k\ge 2,$$

where $A_j=B_je^{P_j},j=0,1,\cdots,k-1,B_j(z)$ are entire functions, $P_j(z)$ are polynomials, and $\sigma(B_j)<\deg P_j$.

Key words: linear differential equation; entire functions; order; zero; exponent of convergence.