Vol. 34 (2014)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

特殊 Cartan 型李超代数的 Borel 子代数

高春艳, 刘文德
(哈尔滨师范大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150025)

摘 要: 本文研究了特征零的代数闭域上秩为 4 的有限维特殊 Cartan 型李超代数 S 的结构. 利用正则元的划分, 确定出 S 关于典范环面的所有正根系, 从而得到了 S 的所有 Borel 子代数; 对于每一个正根系, 通过给出其单根系, 得到了任何两个 Borel 子代数的连接关系; 最后确定了每一个 Borel 子代数的极大可解性. 本文所得结果可用于进一步研究 Cartan 型单李超代数的结构与表示.

关 键 词: 特殊 Cartan 型李超代数; 正根系; Borel 子代数; 连接
MR(2010) **主题分类号**: 17B05; 17B20; 17B22 **中 图 分 类 号**: O151.2
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2014)06-1170-11

1 引言

特征零代数闭域上有限维单李超代数分为 9 族典型李超代数和 4 族 Cartan 型李超代数 $W(n)$ $(n \geq 3)$, $S(n)$ $(n \geq 4)$, $H(n)$ $(n \geq 5)$ 和 $\widetilde{S}(n)$ $(n \geq 4且n为偶数)$[1]. 目前, 典型单李超代数的结构与表示理论已经比较丰富, 但关于 Cartan 型李超代数的研究结果相对较少. 文 [2] 定义了素特征域上有限维广义 Cartan 型李超代数, 并且讨论了它们的单性与限制性. 这类模李超代数在除幂代数退化为基础域时, 对偶于特征零域上 Cartan 型李超代数. 文 [3–5] 刻画了 Cartan 型李超代数的有限维不可约表示, 并在纯奇维数超流形的张量场上实现了这些不可约表示, 进而利用不变微分算子方法给出不可约特征标. Serganova 在文 [6, 引理 4.1] 中指出, $W(n)$, $\overline{S}(n)$, $\overline{H}(n)$ 的任意两个 Borel 子代数都可以通过一系列反射连接, 这里 $\overline{S}(n)$, $\overline{H}(n)$ 分别是 $S(n)$, $H(n)$ 通过添加次数导子得到的扩张李超代数.

$S(3)$ 同构于典型李超代数 $P(2)$, $S(4)$ 是最小的特殊 Cartan 型李超代数 [1]. Cartan 型李超代数与李代数乃至典型李超代数在结构性质上有本质区别. 例如, Cartan 型李超代数关于环面分解的根未必正负成对, 根的重数也未必是 1; 对李超代数, 一般按照正根系定义 Borel 子代数. 这是因为, 按极大可解子代数定义的 Borel 子代数, 从表示论观点看, 显得过大 [7]. 李超代数的 Borel 子代数虽是可解的, 但未必是极大可解的, Borel 子代数之间未必有共轭关系 (因此本文研究 Borel 子代数之间的所谓连接关系), 等等. 受文 [6] 的启发, 本文研究最小的特殊 Cartan 型李超代数 $S(4)$ 的 Borel 子代数. 首先, 通过对正则元分类, 得到 $S(4)$ 共有 336 个不同的正根系, 从而 $S(4)$ 有 336 个不同的 Borel 子代数; 进一步, 通过确定每一个正根系的单根系, 得到任何两个 Borel 子代数的连接关系. Cartan 型李超代数的 Borel 子代数必是可解的, 但未必是极大可解的. 因此, 本文最后确定出每一个 Borel 子代数是否是 $S(4)$ 的极大可解子代数.

*收稿日期: 2013-11-26 接收日期:2014-02-14
基金项目: 国家自然科学基金 (11171055); 黑龙江省杰出青年基金 (JC201004).
作者简介: 高春艳 (1990–), 女, 黑龙江尚志县, 硕士, 主要研究方向: 李超代数.
通讯作者: 刘文德

本文约定域 $\mathbb{F}$ 是特征零的代数闭域, $\mathbb{Z}_2$ 是整数模 2 的剩余类加群.

2 基本概念

域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 V, 连同它的一个子空间直和分解 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, 称为一个超空间 ($\mathbb{Z}_2$ - 分次空间), 其中, $V_{\bar{0}}$ 中的元素称为偶元素, $V_{\bar{1}}$ 中的元素称为奇元素. 偶、奇元素统称为 $\mathbb{Z}_2$ - 齐次元素, 并用 $|x|$ 表示齐次元素 x 的 $\mathbb{Z}_2$ - 次数. 为简便, 下文中出现 $|x|$ 时总约定 x 是一个齐次元素.

域 $\mathbb{F}$ 上一个向量空间称为 $\mathbb{F}$ - 代数, 如果它有一个双线性乘法. 一个 $\mathbb{F}$ - 代数 $\mathfrak{A}$ 称为超代数, 如果作为向量空间它是一个超空间 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{A}_{\bar{1}}$, 并且满足 $\mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_\beta \subset \mathfrak{A}_{\alpha+\beta}$, 对于任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$.

设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的超代数, 如果它的乘法 $[-,-]$ 满足斜超对称性和超 Jacobi 等式, 则称 L 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数 [1].

设 V 是一个 $\mathbb{Z}_2$ - 分次空间, 则 V 的所有线性变换构成的向量空间 $\mathrm{End}V$ 关于线性变换的乘法是一个结合超代数, 其中 $(\mathrm{End}V)_\alpha = \{\sigma \in \mathrm{End}V \mid \sigma(V_\beta) \subset V_{\beta+\alpha}, \beta \in \mathbb{Z}_2\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. 规定一个新运算 $[-,-]$:

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|} yx, \quad x, y \in \mathrm{End}V.$$

容易验证, $\mathrm{End}V$ 关于 $[-,-]$ 是一个李超代数，称之为一般线性李超代数, 记作 $\mathfrak{gl}(V)$.

设 $\mathfrak{A}$ 是一个超代数, 齐次线性变换 $D : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的超导子, 若对于任意的 $x, y \in \mathfrak{A}$ 均有

$$D(xy) = D(x)y + (-1)^{|D||x|} xD(y).$$

令 $\mathrm{Der}_{\bar{0}}\mathfrak{A}$ 与 $\mathrm{Der}_{\bar{1}}\mathfrak{A}$ 分别表示 $\mathfrak{A}$ 的偶导子与奇导子构成的向量空间, 记 $\mathrm{Der}\mathfrak{A} = \mathrm{Der}_{\bar{0}}\mathfrak{A} \oplus \mathrm{Der}_{\bar{1}}\mathfrak{A}$, 容易验证 $\mathrm{Der}\mathfrak{A}$ 关于 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$ 的乘法 $[-,-]$ 是一个李超代数, 称为 $\mathfrak{A}$ 的超导子代数.

设 $\Lambda(n)$ 是 $\mathbb{F}$ 上具有 n 个生成元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的外代数, 生成关系为 $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0, i, j = 1, 2, \cdots, n$. $\Lambda(n)$ 具有一组标准基

$$1, \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n; 1 \le k \le n.$$

规定 $|\xi_i| = \bar{1}$, 则可得到 $\Lambda(n)$ 的一个超结构: $\Lambda(n) = \Lambda(n)_{\bar{0}} \oplus \Lambda(n)_{\bar{1}}$. 记 $W(n) = \mathrm{Der}\Lambda(n)$, 由上面的讨论知道 $W(n)$ 是 $\Lambda(n)$ 的超导子代数, 称为秩为 n 的 Witt 型李超代数 [1].

由 $\Lambda(n)$ 的泛性可知，$\Lambda(n)$ 有奇导子 ∂_i:

$$\partial_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

并且 $W(n) = \{\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i \mid f_i \in \Lambda(n)\}$.

若超代数 $\mathfrak{A}$ 作为向量空间是 $\mathbb{Z}$ - 分次的超空间, 即 $\mathfrak{A} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{A}_i$, 并且满足 $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j \subset \mathfrak{A}_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, 则称 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathbb{Z}$ - 分次超代数. 若 $x \in \mathfrak{A}_i$, 记 $\|x\| = i$, 称之为 x 的 $\mathbb{Z}$ - 次数.

令 $\|\xi_i\| = 1$, 可以定义 $\Lambda(n)$ 的一个 $\mathbb{Z}$ - 分次结构 [1]:

$$\Lambda(n) = \oplus_{i=0}^{n}\Lambda(n)_i, \ \ \Lambda(n)_i\Lambda(n)_j \subset \Lambda(n)_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

设

$$F_{ij} : \Lambda(n) \longrightarrow W(n), \quad a \longmapsto \partial_i(a)\partial_j + \partial_j(a)\partial_i, \quad 1 \le i, j \le n,$$

则 F_{ij} 是 $\Lambda(n)$ 到 $W(n)$ 的一个线性映射且 $\|F_{ij}\| = -2$. 记

$$S(n) = \mathrm{span}\{F_{ij}(a) \mid a \in \Lambda(n), 1 \le i, j \le n\},$$

则 $S(n)$ 是一个李超代数, 称为秩为 n 的特殊 Cartan 型李超代数. 由 $\Lambda(n)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 分次结构自然地得到了 $S(n)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 分次结构

$$S(n) = S(n)_{-1} \oplus S(n)_0 \oplus \cdots \oplus S(n)_{n-2}.$$

3 根系以及根系的分解

本文主要研究秩为 4 的特殊 Cartan 型李超代数 S 的结构. 显然 $S_0 \cong \mathfrak{sl}(4)$, 同构映射为

$$\begin{aligned} &\xi_i\partial_j \longmapsto e_{ij}, \quad 1 \le i \ne j \le 4, \\ &\xi_i\partial_i - \xi_{i+1}\partial_{i+1} \longmapsto e_{ii} - e_{i+1,i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

称

$$\mathfrak{h} = \mathrm{span}_F\{e_{11} - e_{22}, e_{22} - e_{33}, e_{33} - e_{44}\}$$

为 $\mathfrak{sl}(4)$ 的典范环面. 设 ε_i 是 e_{ii} 的对偶基, 即 $\varepsilon_i(e_{jj}) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le 4$. 记 S_k 关于 $\mathfrak{h}$ 的根集为 Δ_k, 其中 $k = -1, 0, 1, 2$. 特别地, $\mathfrak{sl}(4)$ 关于 $\mathfrak{h}$ 有根空间分解

$$\mathfrak{sl}(4) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta_0}\mathfrak{sl}_\alpha), \quad \Delta_0 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le 4\}.$$

类似地, 可得到 S_{-1}, S_1, S_2 关于 $\mathfrak{h}$ 的根集为

$$\begin{aligned} \Delta_{-1} &= \{-\varepsilon_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}; \\ \Delta_1 &= \{\varepsilon_i + \varepsilon_j - \varepsilon_k \mid 1 \le i < j \le 4; k = 1, 2, 3, 4\}; \\ \Delta_2 &= \{\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k - \varepsilon_l \mid 1 \le i < j < k \le 4; l = 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

记 $\Delta = \Delta_{-1} \cup \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$, 称为 S 的根系.

定义 3.1 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, V的对偶空间V^* 中任意有限个非零的线性函数构成的集合称为 V 的一个根系.

设 Δ 是 V 的一个根系, 称 $v \in V$ 为正则元, 如果对于任意的 $\alpha \in \Delta$, 均有 $\alpha(v) \ne 0$. 由线性代数的基本理论, 有限个真子空间不能覆盖整个空间, 故正则元一定存在.

定义 3.2 对于任意给定的正则元 $v_0 \in V$, 称 $\Delta_+(v_0) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(v_0) > 0\}$ 为 V 的一个正根系, 称 $\Delta_-(v_0) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(v_0) < 0\}$ 为 V 的一个负根系.

如无特殊说明, Δ_+ (Δ_-) 总表示 V 的一个根系 Δ 关于某一个正则元的正 (负) 根系.

定义 3.3 一个根 $\alpha \in \Delta$ 称为本质的, 如果 $-\alpha \in \Delta$; 一个根 $\alpha \in \Delta$ 称为非本质的, 如果 $-\alpha \notin \Delta$.

定义 3.4 一个正根 $\alpha \in \Delta_+$ 称为单根, 如果从 Δ_+ 中删去 α, 再添上 $-\alpha$ (当 $-\alpha \in \Delta$ 时), 得到的根集仍然是一个正根系 Δ'_+. 此时称这两个正根系是通过单根 α 的反射 1- 连接的, 也称为邻接, 记为 $\Delta'_+ = \gamma_\alpha(\Delta_+)$. 若单根 α 是本质的, 称 Δ_+ 与 Δ'_+ 是双邻接的, 若单根 α 是非本质的, 称 Δ_+ 与 Δ'_+ 是单向邻接的. 如果从 Δ_+ 出发经过 n $(n \geq 1)$ 次反射得到正根系 Δ'_+, 称 Δ_+ 与 Δ'_+ 是连接的. 如果 Δ'_+ 与 Δ_+ 也是连接的, 称这两个正根系是双向连接的, 否则, 称 Δ_+ 与 Δ'_+ 是单向连接的.

引理 3.5 单根不能写成其余正根的非负线性组合.

证 由定义 3.4, 这是显然的.

定义 3.6 一个正根系的所有单根构成的集合称为这个正根系的单根系.

令 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的标准基张成的实空间, 则有

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{h_1e_{11} + h_2e_{22} + h_3e_{33} + h_4e_{44} \mid \sum_{i=1}^{4} h_i = 0 \text{ 且 } h_i \in \mathbb{R}\}.$$

定义 3.7 [6] 令 $\mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha\in\Delta_+} S_\alpha, \mathfrak{n}_- = \oplus_{\alpha\in\Delta_-} S_\alpha$, 则 $S = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ 称为 S 的一个三角分解. 记 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ 为 S 的一个 Borel 子代数.

定义 3.8 设 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}'$ 是 S 的两个 Borel 子代数, 如果删去 $\mathfrak{b}$ 中的单根 α, 再添上 $-\alpha$ (当 $-\alpha \in \Delta$ 时), 恰好得到 $\mathfrak{b}'$, 则称 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}'$ 是通过单根 α 的反射 1- 连接的, 也称为邻接, 记为 $\mathfrak{b}' = \gamma_\alpha(\mathfrak{b})$. 如果由 $\mathfrak{b}$ 经过 n $(n \geq 1)$ 次反射得到 $\mathfrak{b}'$, 则称 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}'$ 是连接的; 如果 $\mathfrak{b}'$ 和 $\mathfrak{b}$ 也是连接的, 则称 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}'$ 是双向连接的, 否则, 称 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}'$ 是单向连接的. 于是由定义 3.4 可知, 两个正根系连接当且仅当相应的两个 Borel 子代数连接.

4 Borel 子代数

由于 S 只有有限个根, 所以 S 的正根系只有有限个, 从而 S 的 Borel 子代数也只有有限个. 本节将给出 S 的所有正根系, 相应地得到了 S 的所有 Borel 子代数. 对于每一个正根系, 将通过确定其单根系得到与之邻接的正根系. 根据前面的讨论可以将 S 的根分为下面五种类型:

$$(1)\quad \pm\,\varepsilon_i; \quad (2)\quad \pm\,(\varepsilon_i - \varepsilon_j); \quad (3)\quad \varepsilon_i + \varepsilon_j; \quad (4)\quad \varepsilon_i + \varepsilon_j - \varepsilon_k; \quad (5)\quad \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k - \varepsilon_l,$$

其中 i, j, k, l 两两不同. 根据定义, 记 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 的全体正则元集为

$$\mathrm{Reg}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus \cup_{\alpha\in\Delta} \ker\alpha.$$

对于 $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, 以下总用 h_i 来表示 h 关于 e_{ii} 的坐标, 简记为 $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$.

引理 4.1 $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 是正则元当且仅当下面五个条件成立:

(1) h_1, h_2, h_3, h_4 都不为零;

(2) h_1, h_2, h_3, h_4 两两不同;

(3) h_1, h_2, h_3, h_4 中无相反数对;

(4) h_1, h_2, h_3, h_4 中任何一项不等于其余三项中任意两项的和;

(5) h_1, h_2, h_3, h_4 中任何一项不等于其余三项的和.

设 S_4 是 4 次对称群, 对于任意的 $\pi \in S_4, h=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in \mathrm{Reg}(\mathfrak{h})$, 规定

$$\pi(h)=(h_{\pi(1)},h_{\pi(2)},h_{\pi(3)},h_{\pi(4)}). \tag{4.1}$$

由引理 4.1, 容易验证上式定义了 S_4 在正则元集 $\mathrm{Reg}(\mathfrak{h})$ 上的一个群作用.

将 $h_1<h_2<h_3<h_4$ 时得到的正则元集记为

$$\mathrm{Reg}^0=\{h\in \mathrm{Reg}(\mathfrak{h})\mid h_1<h_2<h_3<h_4\}. \tag{4.2}$$

容易验证, 对于任意的 $x_1,x_2\in \mathrm{Reg}^0$, $\tau\in S_4$, 有

$$\tau(x_1)=x_2 \Longleftrightarrow \tau=1且x_1=x_2, \tag{4.3}$$

这里 1 是 S_4 的单位元.

引理 4.2 $\mathrm{Reg}(\mathfrak{h})=\cup_{\pi\in S_4}\pi(\mathrm{Reg}^0)$; 并且$\pi(\mathrm{Reg}^0)\cap\sigma(\mathrm{Reg}^0)=\emptyset$, 只要$\pi\neq\sigma$.

证 由于 (4.1) 式定义了 S_4 在正则元集 $\mathrm{Reg}(\mathfrak{h})$ 上的一个群作用, 则 $\mathrm{Reg}(\mathfrak{h})=\cup_{\pi\in S_4}\pi(\mathrm{Reg}^0)$ 是显然的. 于是只需证明

$$\pi(\mathrm{Reg}^0)\cap\sigma(\mathrm{Reg}^0)=\emptyset,\quad \pi\neq\sigma.$$

假设不然, 一定存在 $h\in\pi(\mathrm{Reg}^0)\cap\sigma(\mathrm{Reg}^0)$, 从而存在 $x_1,x_2\in\mathrm{Reg}^0$, 使得 $\pi(x_1)=h=\sigma(x_2)$, 于是 $\sigma^{-1}\pi(x_1)=x_2$, 故由 (4.3) 式可知, $\pi=\sigma$, 假设不成立.

从而要确定全体正则元集, 只需确定满足以下条件的正则元 h:

$$h_1<h_2<h_3<h_4, \tag{4.4}$$

再经过 S_4 的作用, 便得到了全部的正则元.

类似地, 对于 $\pi\in S_4, a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4\in\Delta$, 规定

$$\pi(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4)=a_1\varepsilon_{\pi(1)}+a_2\varepsilon_{\pi(2)}+a_3\varepsilon_{\pi(3)}+a_4\varepsilon_{\pi(4)}. \tag{4.5}$$

上式也定义了 S_4 在根系 Δ 上的一个群作用.

引理 4.3 对于任意的 $\pi\in S_4, h\in\mathrm{Reg}(\mathfrak{h})$, 有 $\pi^{-1}(\Delta_+(h))=\Delta_+(\pi(h))$.

证 对于任意的 $a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4\in\Delta_+(h)$, 有

$$(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4)(h)=a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+a_4h_4>0,$$

且由 (4.5) 式可知

$$\pi^{-1}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4)=a_1\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}+a_2\varepsilon_{\pi^{-1}(2)}+a_3\varepsilon_{\pi^{-1}(3)}+a_4\varepsilon_{\pi^{-1}(4)},$$

于是

$$\begin{aligned}&\pi^{-1}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4)(\pi(h))\\=&(a_1\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}+a_2\varepsilon_{\pi^{-1}(2)}+a_3\varepsilon_{\pi^{-1}(3)}+a_4\varepsilon_{\pi^{-1}(4)})(h_{\pi(1)},h_{\pi(2)},h_{\pi(3)},h_{\pi(4)})\\=&a_1h_{\pi(\pi^{-1}(1))}+a_2h_{\pi(\pi^{-1}(2))}+a_3h_{\pi(\pi^{-1}(3))}+a_4h_{\pi(\pi^{-1}(4))}\\=&a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+a_4h_4>0,\end{aligned}$$

故 $\pi^{-1}(\Delta_+(h))\subset\Delta_+(\pi(h))$, 反包含关系同理可证.

定理 4.4 S 共有 336 个不同的正根系, 这些正根系以及相应的单根系, 与之邻接的正根系由表 1 给出. 进而 S 共有 336 个 Borel 子代数.

证 先确定所有的正则元, 由前面讨论可知, 只需确定满足 (4.4) 式的正则元即可. 以下分 4 种情形讨论:

情形 1 $h_1<0<h_2<h_3<h_4$. 此时的正则元集是下面 2 个不交子集的并集:

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_1 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid h_2<h_3<h_4<|h_1|,\quad h_2+h_3>h_4\};\\ \mathrm{Reg}_2 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid h_2<h_3<h_4<|h_1|,\quad h_2+h_3<h_4\}.\end{aligned}$$

情形 2 $h_1<h_2<0<h_3<h_4$且$|h_2|<h_3<h_4<|h_1|$. 此时的正则元集是下面 5 个不交子集的并集:

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_3 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_2|<h_3-h_2<h_4-h_3<|h_1|<h_4-h_2\text{或}\\ &\qquad |h_2|<h_4-h_3<h_3-h_2<|h_1|<h_4-h_2\};\\ \mathrm{Reg}_4 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_2|<h_3-h_2<h_4-h_3<h_4-h_2<|h_1|\text{或}\\ &\qquad |h_2|<h_4-h_3<h_3-h_2<h_4-h_2<|h_1|\};\\ \mathrm{Reg}_5 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid h_4-h_3<|h_2|<|h_1|<h_3-h_2<h_4-h_2\};\\ \mathrm{Reg}_6 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid h_4-h_3<|h_2|<h_3-h_2<|h_1|<h_4-h_2\};\\ \mathrm{Reg}_7 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid h_4-h_3<|h_2|<h_3-h_2<h_4-h_2<|h_1|\}.\end{aligned}$$

情形 3 $h_1<h_2<0<h_3<h_4$且$h_3<|h_2|<|h_1|<h_4$. 此时的正则元集是下面 5 个不交子集的并集:

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_8 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_2|<|h_1|<h_3-h_2<h_4-h_3\text{或}\\ &\qquad |h_2|<|h_1|<h_4-h_3<h_3-h_2\};\\ \mathrm{Reg}_9 &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_2|<h_3-h_2<|h_1|<h_4-h_3\};\\ \mathrm{Reg}_{10} &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_2|<h_3-h_2<h_4-h_3<|h_1|\text{或}\\ &\qquad |h_2|<h_4-h_3<h_3-h_2<|h_1|\};\\ \mathrm{Reg}_{11} &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_2|<h_4-h_3<|h_1|<h_3-h_2\};\\ \mathrm{Reg}_{12} &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid h_4-h_3<|h_2|<|h_1|<h_3-h_2\}.\end{aligned}$$

情形 4 $h_1<h_2<h_3<0<h_4$. 此时的正则元集是下面 2 个不交子集的并集:

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_{13} &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_3|<|h_2|<|h_1|<h_4,\quad h_2+h_3>h_1\};\\ \mathrm{Reg}_{14} &= \{h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\mid |h_3|<|h_2|<|h_1|<h_4,\quad h_2+h_3<h_1\}.\end{aligned}$$

于是, 满足 (4.4) 式的正则元集是以上 14 个两两不交子集的并集, 从而全体正则元集是 336 个两两不交子集的并集. 记 $\mathrm{X}=\{\pi(\mathrm{Reg}_i)\mid\pi\in S_4,i=1,\cdots,14\}$,

于是, 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathrm{Reg}(\mathfrak{h})$, 显然有

$$\Delta_+(x_1)=\Delta_+(x_2)\Longleftrightarrow x_1,x_2\in\pi(\mathrm{Reg}_i). \tag{4.6}$$

断言, 集合 X 和全体正根系的集合 P 之间是一一对应的. 事实上, 设

$$\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{P}, \quad \pi(\mathrm{Reg}_i) \longmapsto \Delta_+(h), \quad h \in \pi(\mathrm{Reg}_i).$$

由 (4.6) 式可知, φ 是映射, 又由于 φ 是满射显然成立, 故下面证明 φ 是单射. 由满足 (4.4) 式的正则元的分类可知, 对于任意的 $\tau \in S_4$, 有

$$\varphi(\tau(\mathrm{Reg}_i)) \neq \varphi(\tau(\mathrm{Reg}_j)), \quad 1 \leq i \neq j \leq 14, \tag{4.7}$$

于是只需证明, 对于任意的 $\pi, \sigma \in S_4, \pi \neq \sigma$, 有

$$\varphi(\pi(\mathrm{Reg}_i)) \neq \varphi(\sigma(\mathrm{Reg}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq 14.$$

当 $i = j$ 时, 上式显然成立; 当 $i \neq j$ 时, 假设不然, 则对于任意的 $x_1 \in \pi(\mathrm{Reg}_i), x_2 \in \sigma(\mathrm{Reg}_j)$, 有 $\Delta_+(x_1) = \Delta_+(x_2)$, 从而存在 $x_1' \in \mathrm{Reg}_i, x_2' \in \mathrm{Reg}_j$, 使得 $\Delta_+(\pi(x_1')) = \Delta_+(\sigma(x_2'))$, 由 (4.6) 和 (4.3) 式可知, $\pi = \sigma$, 又根据引理 4.3, 有 $\Delta_+(x_1') = \Delta_+(x_2')$. 这与 (4.7) 式矛盾.

综上 S 共有 336 个不同的正根系, 从而 S 共有 336 个 Borel 子代数.

表 1 :

正则元	正根系	单根系	邻接正根系
Reg_1	Δ_+^1	$\varepsilon_3-\varepsilon_2,\ \varepsilon_4-\varepsilon_3,\ \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4$	$\Delta_+^{15},\ \Delta_+^{16},\ \Delta_+^2$
Reg_2	Δ_+^2	$\varepsilon_3-\varepsilon_2$	Δ_+^{17}
Reg_3	Δ_+^3	$\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3$	$\Delta_+^4,\ \Delta_+^6$
Reg_4	Δ_+^4	$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3$	Δ_+^7
Reg_5	Δ_+^5	$\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2,\ \varepsilon_4-\varepsilon_3$	$\Delta_+^6,\ \Delta_+^{18}$
Reg_6	Δ_+^6	$\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2$	Δ_+^7
Reg_7	Δ_+^7	$\varepsilon_4-\varepsilon_3$	Δ_+^{19}
Reg_8	Δ_+^8	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2,\ \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3$	$\Delta_+^{20},\ \Delta_+^9,\ \Delta_+^{11}$
Reg_9	Δ_+^9	$\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3$	Δ_+^{10}
Reg_{10}	Δ_+^{10}		
Reg_{11}	Δ_+^{11}	$\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3$	$\Delta_+^{10},\ \Delta_+^{12}$
Reg_{12}	Δ_+^{12}	$\varepsilon_2-\varepsilon_1$	Δ_+^{21}
Reg_{13}	Δ_+^{13}	$\varepsilon_3-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1$	$\Delta_+^{22},\ \Delta_+^{14}$
Reg_{14}	Δ_+^{14}	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\ \varepsilon_3-\varepsilon_2$	$\Delta_+^{23},\ \Delta_+^{24}$

上表中的所有正根系分别由下面的表格给出:

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^1	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3, \varepsilon_2+\varepsilon_4, \varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^2	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^3	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^4	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^5	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^6	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^7	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^8	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1,\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^9	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_4, \varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^{10}	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_4, \varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^{11}	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_4, \varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^{12}	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_4, \varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^{13}	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_4,$
		$\varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$
	$\Delta_+^{(-1)}$	$-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3$
	$\Delta_+^{(0)}$	$\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_1, \varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3$
Δ_+^{14}	$\Delta_+^{(1)}$	$\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3,$
		$\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1, \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2$
	$\Delta_+^{(2)}$	$\varepsilon_1+\varepsilon_4, \varepsilon_2+\varepsilon_4,$
		$\varepsilon_3+\varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1$

上述表格中, $\Delta_+^{(i)} = \Delta_+ \cap \Delta_i$ $(i=-1,0,1,2)$, 并且以下等式成立:

$$\begin{aligned}
&\Delta_+^{15} = (23)(\Delta_+^1), \Delta_+^{16} = (34)(\Delta_+^1),\\
&\Delta_+^{17} = (23)(\Delta_+^2), \Delta_+^{18} = (34)(\Delta_+^5),\\
&\Delta_+^{19} = (34)(\Delta_+^7), \Delta_+^{20} = (12)(\Delta_+^8), \Delta_+^{21} = (12)(\Delta_+^{12}),\\
&\Delta_+^{22} = (23)(\Delta_+^{13}), \Delta_+^{23} = (12)(\Delta_+^{14}), \Delta_+^{24} = (23)(\Delta_+^{14}).
\end{aligned}$$

由 (4.1) 和 (4.5) 式以及表 1, 可以得到任何两个正根系的连接情况, 等价地, 也可得到任何两个 Borel 子代数的连接情况.

以下记 Δ_+^i 对应的 Borel 子代数为 $\mathfrak{b}_i, i=1,2,\cdots,336$.

推论 4.5 S 共有 192 对 Borel 子代数是双向连接的.

证 只需确定双向连接的正根系的个数即可. 这由定理 4.4 可以得到.

推论 4.6 S 存在双向互不连接的 Borel 子代数.

证 等价地, 只需验证存在双向互不连接的正根系即可. 由 Δ_+^4 与 Δ_+^9 的根表以及表 1 可知: Δ_+^4 通过 $\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3$ 与 Δ_+^7 邻接, 通过 $\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_4-\varepsilon_3$ 与 Δ_+^{19} 连接, 与其它正根系均不连接, 而 Δ_+^9 只通过 $\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3$ 与 Δ_+^{10} 邻接, 所以 Δ_+^4 与 Δ_+^9 是双向互不连接的.

在引言中提到, 李超代数的 Borel 子代数虽是可解的, 但未必是极大可解的, 下面研究 S 的每一个 Borel 子代数的极大可解性.

定理 4.7 S 共有 24 个 Borel 子代数是极大可解子代数.

证 由可解的定义 [1] 可知, S 的 Borel 子代数显然都是可解的, 下面讨论它们的极大性. 又由 (4.5) 式, 只需确定前 14 个 Borel 子代数的极大性, 而 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_5, \mathfrak{b}_8, \mathfrak{b}_{13}$ 是其中所有极大的 Borel 子代数, 于是下面只需确定它们作为 S 的可解子代数的极大性.

首先, 设 $H\supset \mathfrak{b}_{13}$ 是 S 的可解子代数, 则 H 关于 $\mathfrak{h}$ 有一个根空间分解:

$$H=H_-\oplus\mathfrak{h}\oplus H_+,$$

记 H 的根系为 Δ', 则 Δ' 关于 $h\in \mathrm{Reg}_{13}$ 有一个分解: $\Delta'=\Delta'_-\cup\Delta'_+$, 于是有 $\Delta'_+=\Delta_+^{13}$. 设 $\Delta'_-\neq\emptyset$, 则存在 $\alpha\in\Delta'_-$. 若 α 是本质的, 有 $[H_\alpha, H_{-\alpha}]\subset\mathfrak{h}$, 矛盾于 H 的可解性; 若 α 是非本质的, 矛盾于 H 是 S 的子代数, 故 $\Delta'_-=\emptyset$, 所以 $\mathfrak{b}_{13}=H$ 是 S 的极大可解子代数.

对于 $\mathfrak{b}_1$, 记

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \;=\; & \{\varepsilon_1+\varepsilon_i \mid i=2,3,4\}\cup\{\varepsilon_1+\varepsilon_i-\varepsilon_j \mid 2\le j<i\le 4\}\\ & \cup\{\varepsilon_1+\varepsilon_i+\varepsilon_j-\varepsilon_k \mid 2\le i,j,k\le 4, i,j,k\text{两两不同}\},\end{aligned}$$

令 $M=(\oplus_{\alpha\in\Gamma_1}S_\alpha)\oplus\mathfrak{b}_1$, 显然 $\mathfrak{b}_1\subsetneqq M$. 记 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Delta_+^1$, 容易验证, 对于任意的 $\alpha,\beta\in\Gamma$, 均有 $\alpha+\beta\in\Gamma\,(\text{当}\alpha+\beta\in\Delta\text{时})$, 于是 M 是 S 的子代数. 下面验证 M 的可解性, 由文 [1, 命题 1.3.3] 可知, 只需验证 M 的偶部 $M_{\bar 0}$ 可解即可. 令 $\Lambda=\Gamma\cap(\Delta_0\cup\Delta_2)$, $A=\oplus_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha$, 则 $M_{\bar 0}=\mathfrak{h}\oplus A$. 由于 $[M_{\bar 0}, M_{\bar 0}]\subset A$, 且 $A^{(1)}=[A,A]$ 的根系为

$$\Omega_1=\{\varepsilon_3\pm\varepsilon_1,\varepsilon_4\pm\varepsilon_1,\varepsilon_4\pm\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1\},$$

$A^{(2)}=[A^{(1)},A^{(1)}]$ 的根系为

$$\Omega_2=\{\varepsilon_1+\varepsilon_4,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_2+\varepsilon_4,\varepsilon_3+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1\},$$

$A^{(3)}=[A^{(2)},A^{(2)}]$ 的根系 $\Omega_3=\emptyset$, 则 $M_{\bar 0}$ 是可解的.

对于 $\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_5,\mathfrak{b}_8$, 记

$$\Gamma_2=\{\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_4,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3\},$$

令 $N=(\oplus_{\alpha\in\Gamma_2}S_\alpha)\oplus\mathfrak{b}_3$, 则用同样的方法可证得, N 是真包含 $\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_5,\mathfrak{b}_8$ 的 S 的可解子代数.

将 $\mathfrak{b}_{13}$ 经过 S_4 的作用就可以得到 S 所有的 24 个极大可解的 Borel 子代数.

参 考 文 献

[1] Kac V G. Lie superalgebras [J]. Adv. Math., 1977, 26(1): 8–96.

[2] 张永正. 素特征域上的有限维 Cartan 型 Lie 超代数 [J]. 科学通报, 1997, 42(7): 676–680.

[3] Bernshtein I N, Leites D A. Invariant differential operators and irreducible representations of a Lie algebras of vector fields [J]. Serdica, 1981, 7(4): 320–334.

[4] Bernshtein I N, Leites D A. Irreducible representations of finite-dimensional Lie superalgebras of W [J]. Selecta Math. Sovietica, 1983, 3(1): 63–68.

[5] Shapovalov A V. Invariant differential operators and irreducible representations of finite-dimensional Hamiltonian and Poisson Lie superalgebras [J]. Serdica, 1981, 7(4): 337–342.

[6] Serganova V. On representations of Cartan type Lie superalgebras [J]. Amer. Math. Soc. Transl., 2005, 213(2): 223–226.

[7] Musson I M. Lie Superalgebras and enveloping algebras[J]. Amer. Math. Soc., 2012: 25–26.

BOREL SUBALGEBRAS OF SPECIAL LIE SUPERALGEBRAS OF CARTAN TYPE

GAO Chun-yan , LIU Wen-de

(*School of Mathematical Sciences, Harbin Normal University, Harbin 150025, China*)

Abstract: This article studies the structure of a finite-dimensional Special Lie superalgebra S of Cartan type of rank 4 over an algebraically closed field of characteristic zero. First, we characterize all the positive root systems with respect to the canonical torus by means of classifying all the regular elements and in particular we obtain all the Borel subalgebras with respect to the canonical torus. Second, we describe the connection relation between any two Borel subalgebras by means of determining the simple root system for every positive root system. Finally, we determine all the Borel subalgebras which are maximal solvable subalgebras. The main results can be used in the future for studying the structures and representations of the finite-dimensional Lie superalgebras of Cartan type.

Keywords: special lie superalgebra of Cartan type; positive root system; Borel subalgebra; connection

2010 MR Subject Classification: 17B05; 17B20; 17B22