第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

空间的几种超投影性质及其局部化*

陈 东 阳
(南开大学数学系，天津 300071)

摘 要：讨论 Banach 空间几种超投影性质(及其相应的局部化性质)之间的关系，证明了在 Banach 空间 X 自反的条件下，X 是 l_p-次投影空间的充要条件是 X^* 是 l_q-超投影空间，X 是局部 l_p-次投影空间的充要条件是 X^* 是局部 l_q-超投影空间，以及 X 是局部次投影空间的充要条件是 X^* 是局部超投影的. 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(p>1,q>1)$.

关键词：l_p-超投影空间；强超投影空间；局部 l_p-超投影空间；局部强超投影空间；超投影空间；局部超投影空间.

分类号：AMS(2000) 46B04/CLC number：O177.2.1

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0291-06

1 引 言

超投影空间是一种与次投影空间相对偶的概念，这两种空间有很多对偶的性质，例如，当空间 X 是次投影的，则其上的根算子理想与严格奇异算子理想是相等的[4]，而当 X 是超投影空间时，其上的根算子理想与严格余奇异算子理想是重合的[4]. 等等. 文[1]从黎斯算子可 West 分解的充分条件考虑，引入若干种次投影性质及局部次投影性质，对空间的各种次投影性质进行分类比较. 本文在此基础上，运用对偶方法，提出了几种超投影性质，及其相应的局部化性质，在经典序列空间 $l_p(1<p<+\infty)$ 与超投影空间之间引入了几种互不包含的超投影性质. 在本文中，空间 X 均指无限维的 Banach 空间，子空间均指闭子空间. 为简单起见，我们介绍几个记号：$X\approx Y$ 表示 X 和 Y 线性同胚. $X\overset{c}{\approx}Y$ 表示 X 和 Y "c 同构"，即 $d(X,Y)=\inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\|;T:X\to Y\}\leqslant c$($T$ 是同构映射). $X\overset{c}{\subseteq}Y$ 表示 X 是 Y 的可补子空间.

$X\hookrightarrow Y$ 表示存在 Y 的子空间 Z，使得 $X\approx Z$. $X\overset{cc}{\hookrightarrow}Y$ 表示存在 Y 的子空间 Z，使得 $X\approx Z$，且 Z 在 Y 中"c 可补"，即存在投影算子 $P:Y\to Z$，且 $\|P\|\leqslant c$.

设 M 是 X 的子空间，$M^{\perp}:=\{f\in X^*:f(m)=0,\forall\, m\in M\}$. 设 N 是 X^* 的子空间，${}^{\perp}N:=\{x\in X:f(x)=0,\forall\, f\in N\}$.

* 收稿日期：2001-10-15
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10171014)
作者简介：陈东阳(1975-)，博士.

2　定义和例子

定义 2.1[1]　称 Banach 空间 X 是 l_p- 次投影的，若对某一固定的 $p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$（这里当 $p=+\infty$ 时，特指 c_0. 下同），X 的每一无限维闭子空间 E 都含有与 l_p 同构的子空间 F，且 F 在 X 中可补.

定义 2.2[1]　称 Banach 空间 X 是强次投影的，若 X 的每一无限维闭子空间 E 都含有一个可补的无限维闭子空间 F，且 F 与 $l_p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ 中的某一个同构.

对偶地，我们提出如下两个概念：

定义 2.3　称 Banach 空间 X 是 l_p- 超投影的，若对某一固定的 $p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$，$X$ 的每一个有无限亏维的闭子空间 E，都存在一个可补子空间 $F\supseteq E$，且 $X/F\approx l_p$.

定义 2.4　称 Banach 空间 X 是强超投影的，若 X 的每一个有无限亏维的闭子空间 E，都存在一个可补子空间 F，满足 $F\supseteq E$ 且 X/F 与 $l_p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ 中的某一个同构.

由上述定义知，空间 X 是 l_p- 超投影的，蕴涵着 X 是强超投影的，而 X 是强超投影的蕴涵着 X 是超投影的，以下两个例子说明了：强超投影空间未必是 l_p- 超投影的，超投影空间也未必是强超投影空间. 先给出两个引理

引理 2.1[6]　若 $1<p<+\infty$，则 L_p 的每个可补子空间 X，或 $X\approx l_2$ 或存在无限维闭子空间 $Y\subseteq X$，使 $l_p\approx Y\overset{c}{\subseteq}L_p$.

引理 2.2　设 M,N 是 X 的子空间，则 $X=M\oplus N\Leftrightarrow X^*=M^\perp\oplus N^\perp$.

证明　先证必要性. 由 $X=M\oplus N$ 知 $M\perp N$（其中 $M\perp N$ 的定义见[2]），故由[2]的引理 1 有 $X^*=M^\perp+N^\perp$. 而 $X=M\oplus N$ 意味着 $X=M+N$，因此由[2]的引理 2 有 $M^\perp\perp N^\perp$，故 $M^\perp\cap N^\perp=\{0\}$. 从而 $X^*=M^\perp\oplus N^\perp$. 同理可证充分性.

定理 2.1　$L_p(1<p<2)$ 是强超投影空间而非 l_p- 超投影空间.

证明　$L_p=(L_q)^*(2<q<+\infty)$ 任取 L_p 的一个无限亏维的闭子空间 N，则 ${}^\perp N$ 为 L_q 的无限维闭子空间. 事实上，

$$\dim(L_q)^*/N=\dim(L_q)^*/({}^\perp N)^\perp=\dim({}^\perp N)^*=\dim{}^\perp N=\infty,$$

又由[1]知 L_q 是强次投影的，故存在 L_q 的无限维可补子空间 $F\subseteq{}^\perp N$，且 $F\approx l_p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$. 但 F 不同构于 l_1. 事实上，由引理 2.1 知，或者 F 同构于 l_2，或者存在 Y 包含于 F，使 $l_q(2<q<+\infty)\approx Y\overset{c}{\subseteq}l_q$. 显然当 F 同构于 l_2 时，F 不同构于 l_1. 当 $l_q(2<q<+\infty)\approx Y$，且 Y 包含于 F 时，则 $l_q\to F(2<q<+\infty)$. 若 F 同构于 l_1，则 $l_q(2<q<+\infty)\to l_1$，这是不可能的，从而 F 同构于 $l_p(1<p\leqslant +\infty)$，从而 $F^*\approx l_q(1\leqslant q<+\infty)$，因此由 $F^\perp\supseteq N$，且 $L_p/F^\perp=(L_q)^*/F^\perp=F^*\approx l_q(1\leqslant q<+\infty)$. 又因为 F 在 L_q 中可补，则由引理 2.2 知 $F^\perp$ 在 L_p 中可补，故 L_p 是强超投影空间.

定理 2.2　Tsirelson 空间的共轭空间 T^* 是超投影的[3]而非强超投影的.

证明　设 T^* 是强超投影的，则存在 T^* 的一个可补子空间 N，使 $T^*/N\approx l_p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$. 设 $T^*=M\oplus N$，则由引理 2.2 有 $T^{**}=M^\perp\oplus N^\perp$，从而 $N^\perp=T^{**}/M^\perp=M^*\approx l_p(1\leqslant p<+\infty)$ 或 $N^\perp=T^{**}/M^\perp\approx l_\infty$. 因此 $l_p\to T(1\leqslant p<+\infty)$ 或 $l_\infty\to T$. 这与 T 不包含

c_0 或 $l_p(1 \leqslant p < +\infty)$ copy 矛盾，故 T^* 是非强超投影的.

Banach 空间理论中，"局部理论"一般是指研究空间的有限维子空间结构与性质等，本文相应的把各种超投影性质局部化，给出如下定义.

定义 2.5 称 Banach 空间 X 是局部 l_p-超投影的，若有一固定的 p，X 的每一亏维无限的闭子空间 E，都存在 $c > 0$，使对任一自然数 n，都存在 X 的亏维为 n 的闭子空间 $E_n \supseteq E$，且 $X/E_n \overset{c}{\approx} l_p^n$. $X/E_n \overset{cc}{\to} X$.

定义 2.6[1] 称 Banach 空间 X 是局部 l_p-次投影的，若有一固定的 $p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$，$X$ 的每一无限维闭子空间 E 都含有一个相应的正数 $c = c(E) > 0$，使对任一正整数 n，E 都含有 n 维子空间 E_n，E_n 与 l_p^n "c 同构"，且在 X 中"c 可补".

定义 2.7 称 Banach 空间 X 是局部强超投影的，若 X 的每一亏维无限的闭子空间 E，都存在 $c > 0$，使对任一自然数 n，存在 X 中的亏维为 n 的闭子空间 $E_n \supseteq E$，且 X/E_n 与 $l_p^n(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 中某一个 c 同构，且 $X/E_n \overset{cc}{\to} X$.

定义 2.8[1] 称 Banach 空间 X 是局部强次投影的，若 X 的每一无限维闭子空间 E，都含有一个相应 $c > 0$，使对任一正整数 n，E 都含有 n 维子空间 E_n，E_n 与 $l_p^n(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 中的某一个"c 同构"且在 X 中"c 可补".

定义 2.9[1] 称 Banach 空间 X 是局部次投影的，若 X 的每一无限维闭子空间 E，都含有一个相应 $c > 0$，使对任一正整数 n，E 都含有 n 维子空间 E_n，且 E_n 在 X 中"c 可补".

定义 2.10 称 Banach 空间 X 是局部超投影的，若 X 的每一亏维无限闭子空间 E，都存在 $c > 0$，使对任一自然数 n，存在 X 中亏维为 n 的闭子空间 $E_n \supseteq E$，且 $X/E_n \overset{cc}{\to} X$.

3 主要结果

定理 3.1 设 X 是自反的，则 X 是 $l_p(1 < p < +\infty)$-次投影的 $\Leftrightarrow$ X^* 是 l_q-超投影的 $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

证明 $\Rightarrow$ 对固定的 $q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$，任取 X^* 的一个有无限亏维闭子空间 N，则 ${}^{\perp}N$ 为 X 的一个无限维闭子空间，又因为 X 是 l_p-次投影的，故存在一无限维闭子空间 $M \subseteq {}^{\perp}N$，且 M 在 X 中可补，$M \approx l_p$ 故由 X 是自反的知 $M^{\perp} \supseteq N$ 且 $M^* \approx l_p^* = l_q$ 又 $X^*/M^{\perp} \approx M^* \approx l_q$ 所以 $X^*/M^{\perp} \approx l_q$，故 X^* 是 l_q-超投影的.

$\Leftarrow$ 只需证下列命题：设 X 自反，X 是 l_p-超投影，则 X^* 是 l_q-次投影. 事实上，设 N 为 X^* 的无限维闭子空间，则 ${}^{\perp}N$ 为 X 的无限亏维闭子空间. 又因为 X 是 l_p-超投影的，从而存在一个闭子空间 M，$M \supseteq {}^{\perp}N$ 且 $X/M \approx l_p$，M 在 X 中可补，则由 X 是自反的 $M^{\perp} \subseteq N$ 且 $M^{\perp} \approx (X/M)^* \approx l_p^* = l_q$. 所以 $M^{\perp} \approx l_q$，且由引理 2.2 知 $M^{\perp}$ 在 X^* 中可补. 故 X^* 是 l_q-次投影.

推论 3.1 经典序列空间 $l_p(1 < p < +\infty)$ 都是 l_p-超投影的.

引理 3.1 设 X_n，$Y_n(n = 1, 2, \cdots)$ 是 Banach 空间序列，且 $X_n \overset{c}{\approx} Y_n (c > 0)$，则

$$X_n^* \stackrel{c}{\approx} Y_n^*.$$

证明 因为 $X_n \stackrel{c}{\approx} Y_n$，所以 $d(X_n,Y_n)=\inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\|;T:X_n\to Y_n\}\leqslant c$（$T$ 是同构映射），又若 $T:X_n\to Y_n$ 同构，则 $T^*:Y_n^*\to X_n^*$ 亦为同构，且 $\|T\|=\|T^*\|$，$\|T^{-1}\|=\|(T^{-1})^*\|=\|(T^*)^{-1}\|$，故 $\{\|T\|\,\|T^{-1}\|;T:X_n\to Y_n$ 同构$\}\subseteq\{\|S\|\,\|S^{-1}\|;S:Y_n^*\to X_n^*$ 同构$\}$，所以 $d(X_n^*,Y_n^*)\leqslant d(X_n,Y_n)\leqslant c$.

引理 3.2 设 $\{X_n^*\}(n=1,2,\cdots)$，Y 都是 Banach 空间，且 $X_n \stackrel{cc}{\to} Y$，则 $X_n^* \stackrel{cc}{\to} Y^*$.

证明 因为 $X_n \stackrel{cc}{\to} Y$，所以存在 $Z_n\subseteq Y$，使得 $Z_n\approx X_n$，且 X_n 在 Y 中"c 可补"，故存在 $P_n:Y\to Z$ 为投影，且 $\|P_n\|\leqslant c$ 即 $Y_n\subseteq Y$，使 $Y=Y_n\oplus Z_n$. 令 $Q_n:Y^*\to Z_n^{\perp}:f\to(I^*-P_n^*)(f)$，$\forall f\in Y^*$. 事实上，$\forall x\in Z_n$，

$$[(I^*-P_n^*)(f)](x)=f[(I-P_n)(x)]=f(x-P_nx)=f(x-x)=0,$$

故 $(I^*-P_n^*)f\in Z_n^{\perp}$，且当 $f\in Z_n^{\perp}$ 时，$(I^*-P_n^*)(f)=f$. 事实上 $\forall y\in Y$，

$$[(I^*-P_n^*)(f)](y)=f(y-P_ny)=f(y).$$

故 Q_n 为 Y^* 到 $Z_n^{\perp}$ 上的投影算子，令 $Y^*=Q_nY^*+(I^*-Q_n)Y^*$，再令 $Y_n^*=(I^*-Q_n)Y^*$，则 $I^*-Q_n:Y^*\to Y_n^*$ 是投影算子，且

$$\|I^*-Q_n\|=\|I^*-(I^*-P_n^*)\|=\|P_n^*\|=\|P_n\|\leqslant c.$$

所以 Y_n^* 在 Y^* 中"c 可补"，从而 $Y^*/Z_n^{\perp}\approx Y_n^* \stackrel{c}{\subseteq} Y^*$，因此 $Y^*/Z_n^{\perp} \stackrel{cc}{\to} Y^*$；从而 $Z_n^* \stackrel{c}{\to} Y^*$，因此

$$X_n^* \stackrel{cc}{\to} Y^*.$$

定理 3.2 设 X 自反，则 X 是局部 l_p- 次投影（$1<p<+\infty$），$\Leftrightarrow X^*$ 是局部 l_q- 超投影

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

证明 $\Rightarrow$ 任取 X^* 的一亏维无限的闭子空间 N，则 ${}^{\perp}N$ 为 X 的无限维闭子空间，则存在 $c>0$，使对任一自然数 n，${}^{\perp}N$ 含有 n 维子空间 E_n，$E_n \stackrel{c}{\approx} l_p^n$，且 $E_n \stackrel{c}{\subseteq} X$，由 $E_n\subseteq{}^{\perp}N$ 及 X 是自反的知 $E_n^{\perp}\supseteq N$，从而 $\dim X^*/E_n^{\perp}=\dim E_n^*=n$. $E_n^{\perp}$ 是 X^* 中包含 N 且亏维为 n 的闭子空间，又 $E_n \stackrel{c}{\approx} l_p^n$，由引理 3.1 知 $E_n^* \stackrel{c}{\approx} (l_p^n)^*=l_q^n$，故 $X^*/E_n^{\perp} \stackrel{c}{\approx} l_q^n$. 又因为 $E_n \stackrel{c}{\subseteq} X$，再由引理 3.2 知 $E_n^* \stackrel{cc}{\to} X^*$，从而 $X^*/E_n^{\perp} \stackrel{cc}{\to} X^*$，从而 X^* 是局部 l_q- 超投影.

$\Leftarrow$ 任取 X 的无限维闭子空间 N，则 $N^{\perp}$ 为 X^* 的无限亏维闭子空间，则存在 $c>0$，使对每一自然数 n，存在 X^* 中亏维为 n 的子空间 $E_n\supseteq{}^{\perp}N$，且 $X^*/E_n \stackrel{c}{\approx} l_q^n$，且 $X^*/E_n \stackrel{cc}{\to} X^*$，从而 ${}^{\perp}E_n\subseteq N$，且 $\dim{}^{\perp}E_n=n$. 又 $({}^{\perp}E_n)^*=X^*/({}^{\perp}E_n)^{\perp}=X^*/E_n\approx l_q^n$ 依引理 3.2 知 $({}^{\perp}E_n)^{**} \stackrel{cc}{\to} X^{**}$. 又因为 X 自反，所以 ${}^{\perp}E_n \stackrel{cc}{\to} X$，故 X 是局部 l_p- 次投影的.

推论 3.2 每一个 J- 凸空间的共轭空间是局部 l_p- 超投影（确切的，是局部 l_2- 超投影）.

证明 设 X 是 J- 凸空间，则 X 自反，且 X 是 B- 凸空间，由[1]知 X 是局部 l_2- 次投影，再依定理 3.2 知 X^* 是局部 l_2- 超投影.

定理 3.3 设 X 自反，则 X 是局部次投影 $\Leftrightarrow X^*$ 是局部超投影的.

证明 $\Rightarrow$ 任取 X^* 的无限亏维的闭子空间 N，则 ${}^{\perp}N$ 为 X 的无限维闭子空间，从而存在 c

>0，使对于任意自然数 n，${}^{\perp}N$ 含有 n 维子空间 E_n，且 E_n 在 X 中"c 可补"，因此 $E_n \subseteq {}^{\perp}N$，从而由 X 是自反的知 $E_n^{\perp} \supseteq N^{\perp}$. 且 $\dim X^*/E_n^{\perp} = \dim E_n^* = n$，于是 $E_n^{\perp}$ 是 X^* 中包含 N 的亏维为 n 的闭子空间，且由引理 3.2 知 $E_n^* \overset{cc}{\rightarrow} X^*$. 从而 $X^*/E_n^{\perp} = E_n^* \overset{cc}{\rightarrow} X^*$.

$\Leftarrow$ 任给 X 的无限维闭子空间 E，则 $E^{\perp}$ 为 X^* 中的亏维无限的闭子空间，从而存在 $c>0$，使对于任意自然数 n，存在亏维为 n 的闭子空间 $E_n \supseteq E^{\perp}$，且 $X^*/E_n \overset{cc}{\rightarrow} X^*$，于是 ${}^{\perp}E_n \subseteq E$，且 $n = \dim X^*/({}^{\perp}E_n)^{\perp} = \dim ({}^{\perp}E_n)^* = \dim {}^{\perp}E_n$，又因为 $X^*/E_n \overset{cc}{\rightarrow} X^*$，从而 $({}^{\perp}E_n)^* \overset{cc}{\rightarrow} X^*$. 因此 $({}^{\perp}E_n)^{**} \overset{cc}{\rightarrow} X^{**}$，故 ${}^{\perp}E_n \overset{cc}{\rightarrow} X$. 所以 X 是局部次投影空间.

综上所述，有下列关系图：

$$\begin{tikzcd}
l_p \arrow[r] \arrow[d, dash] & l_p\text{-超投影} \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right] & \text{强超投影} \arrow[l, shift left, "a"] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right] & \text{超投影} \arrow[l, shift left, "b"] \\
l_p \arrow[r, shift left] & \text{局部 } l_p\text{-超投影} \arrow[l, shift left, "c"] \arrow[u, shift right, "d"'] \arrow[r] \arrow[ur, "f"] & \text{局部强超投影} \arrow[u, shift right, "e"'] \arrow[r] \arrow[ur, "g"] & \text{局部超投影} \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd} \qquad (1<p<+\infty)$$

a. 由定理 2.1 知 $L_p(1<p<2)$ 是强超投影而非 l_p- 超投影.

b. 由定理 2.2 知 Tsirelson 空间的共轭空间是超投影而非强超投影的.

c. 取 Figel 和 John. W. B 在[5]所举的例子，他们构造出 Banach 空间 X，该 X 是一致凸的，有对称基，但 X 不含有与 $l_p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 同构的子空间，则 X 是 J- 凸的，从而 X^* 是 J- 凸的. 因此 X^* 是 B- 凸的，从而 X^* 是局部 l_2- 次投影的. 依定理 3.2 知 X 是局部 l_2- 超投影的. 但显然 X 不是 l_p 的.

d. (c) 所举的例子是局部 l_p- 超投影而非 l_p- 超投影.

e. (c) 所举的例子是局部强超投影而非强超投影.

f. (c) 所举的例子是局部 l_p- 超投影而非强超投影.

g. 当 $2<p<+\infty$ 时，L_p 不是超投影，但 $L_p = (L_q)^*$，$(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ $(1<q<2)$，当 $1<q<2$ 时，L_q 是一致凸的，从而 L_q 是 J- 凸的. 由推论 3.2 知 L_p 是局部 l_p- 超投影，更是局部强投影的.

h. (g) 所举的例子是局部超投影而非超投影.

如下结果表明，在一定条件下，经典序列空间和强超投影空间是重合的(同构意义下).

定理 3.4 设 X 的每个有无条件基的可补子空间都与 X 同构，则 $X \in l_p$(同构意义下)$(1 \leqslant p \leqslant +\infty) \Leftrightarrow X$ 是强超投影的.

证明 $\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 因为 X 是强超投影的所以存在可补子空间 $F \subseteq X$，且 X/F 与某一 l_p 同构，因此存在 X 的可补子空间 $M \subseteq X$，M 与某一 l_p 同构，从而 M 有无条件基. 故 $M \approx X$，又 $M \approx l_p$，因此 $X \approx l_p$.

作者衷心感谢导师钟怀杰教授的指导和鼓励.

参考文献：

[1] 钟怀杰. 空间的几种次投影性质及其局部化 [J]. 福建师范大学学报，1992，**8**(3)：13—18.
ZHONG Huai-jie. *Some subprojective properties of Banach spaces and their localizations* [J]. J. Fujian Normal University, 1992, **8**(3): 13—18. (in Chinese)

[2] ZHONG Huai-jie. *Gowers-Maurey's space and its conjugate space* [J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**(1): 14—16.

[3] CASAZZA P G, SHURA T J. *Tsirelson's Space* [M]. Springer Lecture Notes in Math, 1363.

[4] AIENA P, GONZALEZ M. *Essentially incomparable Banach spaces and Fredholm theory* [J]. Proc. R. Ir. Acad., Ser. A, 1993, **93**(1): 49—59.

[5] FIGTEL T, JOHNSON W B. *A uniformly convex Banach space which contains no l_p*[J]. Composition. Math., 1974, **29**: 170—190.

[6] 俞鑫泰. Banach 空间选论 [M]. 上海：华东师范大学出版社，1990.
YU Xin-tai. *Selected Theory of Banach Spaces* [M]. Shanghai: Eastern of China Normal University Press, 1990. (in Chinese)

Some Superprojective Properties of Banach Spaces and Their Localizations

CHEN Dong-yang

(Dept. of Math., Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: In this article the relations between superprojective properties and local superprojective properties of Banach space are discussed. For a reflexive Banach space X, it is proved that X is l_p-subprojective space if and only if X^* is l_q-superprojective space, X is local l_p-subprojective space if and only if X^* is local l_q-superprojective space and X is local subprojective space if and only if X^* is local superprojective space, where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Key words: l_p-superprojective space; strong superprojective space; local l_p-superprojective space; local strong superprojective space; superprojective space; local subprojective space.