第 28卷第 5期　　南京气象学院学报　　Vol. 28 No. 5
2005年 10月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Oct. 2005

文章编号: 1000-2022(2005)05-0657-05

Linard型方程周期解的存在性

周伟灿[1]，　邹兰军[2]
(南京信息工程大学 1.数学系; 2.南京中美合作遥感中心,江苏 南京　210044)

摘　要: 利用 Sobolev空间范数,给出了一般形式的 Linard型方程周期解估计,通过 Schauder不动点定理,证明了周期解的存在性。

关键词: Linard方程; 周期解; Schauder不动点定理; 存在性
中图分类号: O175.1　　文献标识码: A

Linard型方程周期解的存在性一直是人们非常关注的问题。多种非线性分析的工具和方法被应用在此类二阶常微分方程周期解的研究中,主要有变分方法与临界点理论[1],拓扑度同伦方法[2],上下解与单调迭代方法[3],微分同胚方法[4-5]等。本文考虑一般形式的 Linard型方程周期解问题(一):

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = h(t)。\tag{1}$$

$$x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T),\quad i = 0, 1。\tag{2}$$

文献[6]中 $f(x)$是常数,而本文考虑$f(x)$为连续函数。大气科学研究中,由基本方程组可导出大量的此类耗散强迫系统,用于研究非线性重力惯性波[7]及 Rossby波等问题[8]。大气科学研究一般采用行波法,级数展开,摄动法,特殊变换等方法处理而很少证明其解的存在性。本文利用 Sobolev空间范数给出了周期解的估计,然后利用变分方法,通过 Schauder不动点定理,证明了周期解的存在性。所得结果对于研究大气中非线性波动(如重力惯性波及 Rossby波等)存在的条件及相互作用具有重要意义。

1　解的估计

对于问题(一),不失一般性,设 $g(0) = 0, x(0) = x(T) = 0$。

考虑 Sobolev空间 $W^{1,2}([0,T];\mathbf{R})$。

定义 $W^{1,2}$的子空间 $E = \{x \in W^{1,2} \mid x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T),\ i = 0, 1\}$,以下简记 $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|$。

引理 1　设(1) $g \in C(\mathbf{R}), f \in C(\mathbf{R})$, $h(t)$为 $\mathbf{R}$上以 T为周期的连续函数; (2) $\sup\limits_{s \in R} \frac{g(s)}{s} = \lambda < +\infty$; (3) $2 - \lambda T^2 > 0$。则问题(一)的解有界,且有估计式

收稿日期: 2004-06-17; 改回日期: 2004-11-22
基金项目: 江苏省高校自然科学研究计划(02KSB170002)
作者简介: 周伟灿(1959-),男,江苏靖江人,教授,博士,研究方向: 微分方程. E-mail: restsand@163.com.

$$\|x\| \leqslant k\|h\|, \quad \|x\| \leqslant kT^{\frac{1}{2}}\|h\|_{\infty}。 \tag{3}$$

其中 $k = \left(\frac{2}{T^2} - \lambda\right)^{-1} > 0$, $\|h\|_{\infty} = \sup_{t\in[0,T]} |h(t)|$。

证明 对方程(1)式两边分别与 x 作内积

$$\langle -\ddot{x}, x\rangle - \langle f(x)\dot{x}, x\rangle - \langle g(x), x\rangle = -\langle h, x\rangle, \quad x \in E,$$

也即

$$\int_0^T |\dot{x}|^2 \mathrm{d}t - \int_0^T g(x)x = -\int_0^T hx\,\mathrm{d}t。 \tag{4}$$

由柯西不等式,有

$$\int_0^T |x|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{2}\int_0^T |\dot{x}|^2 \mathrm{d}t。 \tag{5}$$

由条件(2)及柯西不等式,(4)式转化为

$$\left(\frac{2}{T^2} - \lambda\right)\int_0^T |x|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^T |\dot{x}|^2 \mathrm{d}t - \int_0^T xg(x)\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_0^T h(t)x\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left(\int_0^T |h(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |x|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}。$$

可得

$$\|x\| \leqslant \left(\frac{2}{T^2} - \lambda\right)^{-1}\|h\|。 \tag{6}$$

另一方面,有 $\left(\frac{2}{T^2} - \lambda\right)\int_0^T |x|^2 \mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\in[0,T]} |h(t)| \int_0^T |x|\,\mathrm{d}t \leqslant T^{\frac{1}{2}}\|h\|_{\infty}\|x\|$,

也即 $\|x\| \leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{T^2} - \lambda\right)^{-1}\|h\|_{\infty}$,证毕。

推论 1 在引理 1条件下,若 $g(x)$ 单调不增,则问题(一)的解有界且

$$\|x\| \leqslant \frac{T^2}{2}\|h\|, \quad \|x\| \leqslant \frac{T^{\frac{5}{2}}}{2}\|h\|_{\infty}。 \tag{7}$$

证明 因 $g(x)$ 连续且单调不增,$g(0) = 0$,所以 $xg(x) \leqslant 0$,在引理 1的每个表达式中取 $\lambda = 0$,即证。

注 在推论 1的条件下,文献[9]的结论表明当 $h \equiv 0$ 时,问题(一)除零解外不存在非平凡周期解,而由(7)式,这是显见的。

引理 2 设引理 1的条件(1)满足,并有

$$\inf_{x\in R} f(x) = \rho > 0 \quad 或 \quad \sup_{x\in R} f(x) = \eta < 0。$$

则问题(一)的解有界且

$$\|x\| \leqslant \frac{T}{\sqrt{2}}\rho^{-1}\|h\| \quad 或 \quad \|x\| \leqslant \frac{T}{\sqrt{2}}(-\eta)^{-1}\|h\|;$$

$$\|x\| \leqslant \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\rho^{-1}\|h\|_{\infty} \quad 或 \quad \|x\| \leqslant \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}(-\eta)^{-1}\|h\|_{\infty}。$$

证明 以情形 $\inf_{x\in R} f(x) = \rho > 0$ 为例证明。

对方程(1)式两边分别与 $\dot{x}$ 作内积,得

$$\int_0^T f(x)\dot{x}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T g(x)\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int_0^T h(\tau)\dot{x}\,\mathrm{d}t,$$

也即

$$\int_0^T f(x)\dot{x}^2 \mathrm{d}t = \int_0^T h(\tau)\dot{x}\,\mathrm{d}t。 \tag{8}$$

所以 $$\rho\int_0^T \dot x^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T f(x)\dot x^2\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^T |h|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\left(\int_0^T |\dot x|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12},$$

即 $$\|\dot x\| \leqslant \rho^{-1}\|h\|。\tag{9}$$

由(5)式, 有 $$\|x\| \leqslant \frac{T}{\sqrt2}\rho^{-1}\|h\|。\tag{10}$$

与引理 1证明类似, 有

$$\|\dot x\| \leqslant T^{\frac12}\rho^{-1}\|h\|_\infty,\tag{11}$$

$$\|x\| \leqslant \frac{T^{\frac32}}{\sqrt2}\rho^{-1}\|h\|_\infty。\tag{12}$$

对 $\sup\limits_{x\in R} f(x) = \eta < 0$的情形同理可证。证毕。

$$|x(t)| \leqslant T^{\frac12}\left(\int_0^T |\dot x|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12},\quad \forall\, t\in[0,T]。\tag{13}$$

从(13)式和引理 1, 引理 2, 可得推论 2~ 4。

推论 2　设在引理 2条件下, 则问题(一)的解有界且

$$|x(t)| \leqslant \begin{cases} T^{\frac12}\rho^{-1}\|h\| \\ T\rho^{-1}\|h\|_\infty \end{cases} \quad 或 \quad |x(t)| \leqslant \begin{cases} T^{\frac12}(-\eta)^{-1}\|h\| \\ T(-\eta)^{-1}\|h\|_\infty \end{cases}。$$

推论 3　设在引理 1, 2条件下, 则有

$$\|x(t)\| \leqslant \begin{cases} \min\left\{k, \dfrac{T}{\sqrt2}\rho^{-1}\right\}\|h\| \\ \min\left\{kT^{\frac12}, \dfrac{T^{\frac32}}{\sqrt2}\rho^{-1}\right\}\|h\|_\infty \end{cases} \quad 或 \quad \|x(t)\| \leqslant \begin{cases} \min\left\{k, \dfrac{T}{\sqrt2}(-\eta)^{-1}\right\}\|h\| \\ \min\left\{kT^{\frac12}, \dfrac{T^{\frac32}}{\sqrt2}(-\eta)^{-1}\right\}\|h\|_\infty \end{cases}。$$

推论 4　在引理 1, 2条件下, 若 $h(t)\equiv 0$, 则问题(一)不存在非平凡周期解。

2　解的存在性

首先考虑问题(二):

$$\ddot x + g(x) = h(t),\tag{14}$$

$$x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T),\quad i = 0, 1。\tag{15}$$

定义泛函 $J: E\to R$,

$$J(x) = \int_0^T\left(\frac12|\dot x|^2 - V(x)\right)\mathrm{d}t + \langle h, x\rangle,\quad \forall\, x\in E。\tag{16}$$

其中 $V(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$。

易证下面的变分原理。

引理 3　J在 E中的临界点是问题(二)的解。

引理 4　E上的 $W^{1,2}$范数等价于下述模

$$\|\dot x\| = \left(\int_0^T|\dot x|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12},\quad \forall\, x\in E。$$

证明　对 $\forall\, x\in E$, (5)式成立, 则

$$\int_0^T|\dot x|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T(|x|^2 + |\dot x|^2)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(1+\frac{T^2}{2}\right)\int_0^T|\dot x|^2\,\mathrm{d}t。\tag{17}$$

结论即证。

定理 1 设 (1) $g\in C(R), f\in C(R)$, $h(t)$为 R 上以 T 为周期的连续函数且 $\int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t = 0$; (2) $V(w) > M, \forall w\in R$, 则问题(二)至少有一个 T-周期解 $x\in C^2[0, T]$。

证明 由(5)式,

$$-\langle h, x\rangle \leqslant \left|\int_0^T hx\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|h\|\,\|x\| \leqslant \frac{T}{\sqrt{2}}\|h\|\,\|\dot{x}\|。 \tag{18}$$

由(16)、(18)式,

$$J(x) \geqslant \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 - \frac{T}{\sqrt{2}}\|h\|\,\|\dot{x}\| - MT。 \tag{19}$$

当 $\|x_n\|_E = \|\dot{x}_n\| \to \infty$ 时, $J(x_n)\to\infty$ 且在 E 中 $J(x)$下方有界, 由正则性定理知, 极小解 $x(t)\in C^2[0, T]$是问题(二)的解。

定理 2 设 (1) $g\in C(R), f\in C(R)$, $h(t)$为 R 上以 T 为周期的连续函数且 $\int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t = 0$; (2) $\sup\limits_{s\in R}\frac{g(s)}{s} = \lambda < +\infty$, $|f(x)|\leqslant H, \forall x\in R$; (3) $\frac{2}{T^2} - \lambda > 0$; (4) 当 $\lambda\leqslant 0$时, $T\left(1+\frac{T^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{H}$; 或者当 $\lambda > 0$时, $\left(1-\frac{\lambda T^2}{2}\right)\theta > H$, 其中 $\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$。则问题(一)至少有一个解 $x\in C^2[0, T]$。

证明 令 $w\in C^2[0, T]\cap E$为满足 $\int_0^T w\,\mathrm{d}t = 0$的周期函数, 考虑周期问题:

$$\ddot{x}_w + g(x_w) = h(t) - f(w)\dot{w}, \quad 0\leqslant t\leqslant T。 \tag{20}$$

$$x_w^{(i)}(0) = x_w^{(i)}(T), \quad i = 0, 1。 \tag{21}$$

由定理 1, 问题(20)、(21)式对于给定的 $w\in C^2[0, T]\cap E$ 至少有一个 T-周期解 $x_w\in C^2[0, T]$, 而且, 定义映射 Γ: $\Gamma w = x_w$。Γ是连续的并且也能够证明 Γ 在 $E\subset W^{1,2}$中是紧的。事实上, 对某个 $r > 0$, 设 $\|w\|_E\leqslant r$, 由引理 4, 亦即 $\|w\|_{C[0,T]}\leqslant r$或 $\|w\|_{L^2}\leqslant r$。

对(20)式与 x_w 作内积, 有

$$\int_0^T|\dot{x}_w|^2\mathrm{d}t - \int_0^T g(x_w)x_w\,\mathrm{d}t = \int_0^T[f(w)\dot{w} - h(t)]x_w\,\mathrm{d}t。 \tag{22}$$

由定理条件(2)、(3)和(4), 有

$$\begin{aligned}\frac{2}{T^2}\int_0^T|x_w|^2\mathrm{d}t - \lambda\int_0^T|x_w|^2\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^T\{|h(t)| + |f(w)\dot{w}|\}|x_w|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}|h(t)|\int_0^T|x_w|\,\mathrm{d}t + H\int_0^T(|\dot{w}| + |w|)|x_w|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \left(T^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}|h(t)| + \sqrt{2}H\|w\|_E\right)\|x_w\|_{L^2}。\end{aligned} \tag{23}$$

因此

$$\|x_w\|\leqslant\frac{T^2}{2-\lambda T^2}\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty + \sqrt{2}Hr\right)。 \tag{24}$$

另一方面, 当 $\lambda\leqslant 0$时, 由(22)、(23)和(5)式, 有

$$\int_0^T|\dot{x}_w|^2\mathrm{d}t \leqslant \left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty + \sqrt{2}H\|w\|_E\right)\frac{T}{\sqrt{2}}\|\dot{x}_w\|,$$

即
$$\|x_w'\|_{L^2} \leqslant \frac{T}{\sqrt{2}}\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty + \sqrt{2}Hr\right)。\tag{25}$$

当 $\lambda > 0$时, 有
$$\|x_w'\|_{L^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}T}{2-\lambda T^2}\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty + \sqrt{2}Hr\right)。\tag{26}$$

由(13)、(17)式和(24)~(26)式显然可知函数族$\{x_w\}$等度连续, 而且, 从(13)、(25)和(26)式得出$\{x_w\}$一致有界。据Ascoli-Arzela定理, $\{x_w\}$在$C^2[0,T]$相对紧, 即映射Γ是紧的。

现在选择$r > 0$, 使得$\mu\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty + \sqrt{2}Hr\right) < r$或者$T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty < \frac{1}{\mu}(1-\sqrt{2}H\mu)r$。其中当$\lambda \leqslant 0$时, $\mu = \sqrt{\frac{1}{2+T^2}}$或当$\lambda > 0$时, $\mu = \frac{\sqrt{2}T}{(2-\lambda T^2)\theta}$, $\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$。这对条件(3)、(4)显然是可能的。

由引理4,有$\|x_w\|_E \leqslant r$和$\|x_w'\| \leqslant r$或者$\|x_w\| \leqslant r$和$|x_w| \leqslant r$, $\forall t \in [0,T]$。这表明Γ把适当的球$B = B(0,r) \subset C^2[0,T] \cap E$映射到自身, 也即$\Gamma B \subset B$。应用Schauder不动点定理, Γ有一个不动点w, 即$w = x_w$。由于h, f和g均连续, $x = x_w \in C^2[0,T]$就是所求的问题(一)的解, 证毕。

定理3　设(1) $f \in C(R)$, $h(t)$为R上以T为周期的连续函数且$\int_0^T h(t)\,dt = 0$; (2) $g(x)$连续且单调不增; (3) $1 - HT\left(1+\frac{T^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$, 则问题(一)至少有一个解$x \in C^2[0,T]$。

证明　因$g(x)$连续且单调不增, $g(0) = 0$知$xg(x) \leqslant 0$, 在定理2证明中取$\lambda = 0$即证。

参考文献:

[1] Mawhin J, Millem M. Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations[J]. J Diff Equs, 1984, 52: 264-287.

[2] Ge Weigao. On the existence of harmonic solutions of Li nard systems[J]. Nonlinear Anal, 1991, 16(2): 183-190.

[3] Nieto J J. Nonlinear second-order periodic boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1988, 130: 22-29.

[4] Shen Zuhe, Wolfe M A. On the existence of periodic solutions of periodically perturbed conservative systems[J]. J Math Anal Appl, 1990, 153(1): 78-83.

[5] 黄文华,沈祖和. Duffing型方程组的边界值问题的解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(8): 875-880.

[6] Tan Junyu, Wen Shiliang. Periodic traveling wave solution to a forced two-dimensional generalized KdV-Burgers equation[J]. J Math Research & Exposition, 2001, 21(4): 483-490.

[7] 赵瑞星.层结大气中重力惯性波的非线性周期解[J]. 气象科学, 1990, 48(3): 275-283.

[8] 赵　强,刘式适. 基本流场切变对赤道长Rossby波的影响[J]. 气象学报, 2001, 59(1): 24-30.

[9] Sugie J, Hara T. Non-existence of periodic solutions of the Li nard system[J]. J Math Anal Appl, 1991, 159(1): 224-236.

Existence of Periodic Solution to Li nard Type Equation

ZHOU Wei-can[1], ZOU Lan-jun[2]

(1. Department of Mathematics; 2. China-America Cooperative Remote Sensing Center, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: For generalized Li nard type equation, we obtain the estimates of periodic solutions by virtue of norm estimate in Sobolev space, and then prove the existence of periodic solutions by utilizing Schauder's fixed point theorem.

Key words: Li nard equation; periodic solutions; Schauder's fixed point theorem; existence