

用脊回法反演重力异常的多层密度及其界面

杨长福
(浙江大学地球科学系, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 将研究区域划分成具有固定宽度的矩形网格, 以网格密度和厚度作为模型参数, 在此基础上形成重力异常的反演目标函数, 计算出对模型参数的偏导数矩阵, 然后采用脊回归法对重力异常进行反演而同时得到密度及其界面。以此方法对理论模型进行了反演试验。

关键词: 脊回归法; 重力异常; 反演

中图分类号: P312 文献标识码: A 文章编号: 1000-0844(2004)04-0293-05

0 引 言

反演总会因实际资料的观测误差及其数量的有限, 而表现为非唯一性。反演的目标就是寻找一些模型既能解释观测资料又能满足物理条件的限制。人们从最小二乘法发展了很多线性反演方法来解决这类问题, 但这些方法的迭代过程中都需要好的初始模型, 以便迭代收敛。但即便如此, 也未必保证能收敛于真实模型^[1]。脊回归法^[2]就常被用来解决这类地球物理反演问题。这种方法的反演效果很大程度上取决于所采用的阻尼过程, 通常是在开始时使阻尼因子取很大的正值, 使收敛过程趋近于最速下降法; 然后在每次迭代后乘以小于1的因子, 使迭代过程接近最小二乘法。然而, Johansen 不用最小特征值, 并在迭代发散时, 用最大特征值来代替它^[3]。脊回归法仍带有上述两种方法中调整阻尼因子的特征, 但采用了两步最小化过程, 使得效率提高^[4]。

密度界面的反演多局限于单层界面的反演^[5], 而多层密度界面的反演比较困难。目前反演多层密度界面的方法主要有两种: 一是把多层密度界面的重力场, 通过分离场的方法逐层分离, 逐层反演^[6]; 二是直接反演, 如王一新的正则化反演法^[7]和陈胜早的 N 层变密度反演法^[8]。这些方法都很复杂, 且要求密度分布已知, 使用起来很不方便。目前同时进行多层密度及其界面反演的还不多。本文将以单元密度和网格厚度为模型参数, 进行重力异常的多层密度及其界面的同时反演。

1 正演模型及计算方法

如图1所示, 将二维地球介质划分成 n 个密度均匀分布的矩形网格。为简便起见, 网格划成宽度不等的 n_x 列, 各列含有数目相同, 厚度不等, 总数为 n_y 个的矩形网格, 按行从左至右从上到下依次排序。图1中第 k 个网格 $ABCD$ 四顶点的坐标分别为 (x_{k1}, y_{k1}) 、 (x_{k2}, y_{k2}) 、 (x_{k3}, y_{k3}) 、 (x_{k4}, y_{k4}) , 其剩余密度为 σ_k , 则在坐标原点 o 处 (当计算点不在原点, 可将坐标系沿水平方向平移到该计算点, 计算公式不变) 的重力异常可由下式计算:

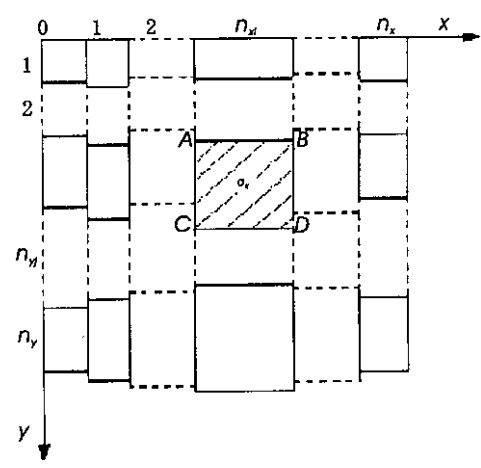


图1 二维密度模型
Fig.1 The two-dimensional density model.

$$\delta g_k = 2G\sigma_k \iint_{ABCD} \frac{y dx dy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

上式积分后可得

$$\delta g_k = G\sigma_k \left[-x_{k1} \ln \frac{x_{k1}^2 + y_{k2}^2}{x_{k1}^2 + y_{k1}^2} + x_{k2} \ln \frac{x_{k2}^2 + y_{k2}^2}{x_{k2}^2 + y_{k1}^2} + 2y_{k2} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k2}}{x_{k1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k2}}{x_{k2}} \right) - 2y_{k1} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k1}}{x_{k1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k1}}{x_{k2}} \right) \right] \quad (2)$$

当网格位于第1行时有 $y_{k1} = 0$ (若异常体上界面不在地面,但 y_{k1} 已知时,则网格也可从该界面划起);当网格不在第1行时有 $y_{k1} = y_{k-n_x-2}$ 。而水平坐标都和第1行网格坐标相同,则所有网格在0点产生的总重力异常可表示为

$$g_i = \sum_{k=1}^n \delta g_k = g(0, x_{12}, \dots, x_{n_x-2}, y_{12}, \dots, y_{n_x-2}, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3)$$

式中 n_x 为水平网格数。当给定或固定网格水平坐标,则上式中 g_i 仅为 y_{k2}, σ_k ($k = 1, \dots, n$) 的函数,则模型参数个数 $2n$ 个,写成向量形式为

$$\mathbf{m} = (m_j)^T = (\sigma_1, \dots, \sigma_n, y_{12}, \dots, y_{n_x-2})^T \quad (4)$$

其中 σ_k, y_{k2} (即式(2)中的 y_{k2}) 分别为第 k 个网格密度和下边界纵坐标, T 表示矩阵或向量的转置。若计算点(观测点)的个数为 m ,并将这 m 个计算值写成向量则有

$$g(\mathbf{m}) = g(\mathbf{m})^T = (g_1(\mathbf{m}), g_2(\mathbf{m}), \dots, g_m(\mathbf{m}))^T \quad (5)$$

2 反演方法

观测的重力异常用向量

$$\mathbf{G}_{\text{obs}} = (G_1, G_2, \dots, G_m)^T \quad (6)$$

表示, m 为观测数据个数。根据脊回归法可写出反演目标函数

$$F = \sum_{i=1}^m (G_i - g_i(\mathbf{m}))^2 + \beta (\Delta \mathbf{m})^T (\Delta \mathbf{m}) \quad (7)$$

其中 $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}^0$ 是模型参数的修改向量, β 为阻尼因子,表示对模型参数修改量 $\Delta \mathbf{m}$ 进行约束。

反演问题就是使目标函数取极小,由极值条件可得方程

$$(A^T A + \beta I) \Delta \mathbf{m} = A^T \Delta \mathbf{Y} \quad (8)$$

其中 $A = \partial g(\mathbf{m}^0) / \partial \mathbf{m}$ 是关于模型参数的偏导数; I 为单位矩阵;向量 $\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{G} - g(\mathbf{m}^0)$ 为观测数据和对初始模型 \mathbf{m}^0 的正演理论计算值之差。用奇异值分解(SVD)法,解方程(8)可得 $\Delta \mathbf{m}$,从而第 $k+1$ 次模型参数修改的迭代公式为

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \Delta \mathbf{m} \quad (10)$$

式中 \mathbf{m}^k 是第 k 次迭代后的模型参数。

3 偏导数矩阵的计算

对本文给定的多层密度界面模型(图1),其模型参数可用公式(4)描述。需反演的模型参数为各网格密度和各矩形网格的下边界坐标,共计 $2n$ 个。当观测点个数 $m \geq 2n$ 时,即可求解方程组(8)进行反演。对于式中的偏导数矩阵 A ,作者曾以各矩形网格下界面坐标为模型修改参数进行过计算。本文用各矩形网格厚度为模型修改参数来求 A 。由

$$A = \partial g(\mathbf{m}^0) / \partial \mathbf{m} \quad (11)$$

得 A 的第 i 行第 j 列元素

$$A_{ij} = \frac{\partial g_i(\mathbf{m}^0)}{\partial m_j} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, 2n) \quad (12)$$

在公式(3)~(5)中若改用各矩形网格厚度作变量,则各网格下界面坐标为其同列以上矩形厚度之和,即当矩形网格在第一行时有

$$y_k = y_{k_1} + h_k \qquad k \leqslant n_x \tag{13}$$

当网格在第二行以下有

$$y_k = y_{k_1} + \sum_{i=1}^{n_{yk}} h_{k-(i-1) \times n_x} \qquad k > n_x \tag{14}$$

其中 h_k 为各网格厚度 k 表示矩形网格编号 n_{yk} 表示当前网格(第 k 个网格)所在的行序号 y_{k_1} 为第一行网格的上界面坐标(当在地面时 $y_{k_1} = 0$) y_k 为第 k 个网格的下界面坐标。将式(13)、(14)代入式(3)–(5)和式(12)中可求得

$$A_{ij} = G \left[x_{j2} \ln \frac{x_{j2}^2 + y_j^2}{x_{j2}^2 + y_{j-1}^2} - x_{j1} \ln \frac{x_{j1}^2 + y_j^2}{x_{j1}^2 + y_{j-1}^2} + 2y_j \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_j}{x_{j1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_j}{x_{j2}} \right) - 2y_{j-1} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{j-1}}{x_{j1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{j-1}}{x_{j2}} \right) \right] \\ (i = 1 \dots m; j = 1 \dots n) \tag{15}$$

$$A_{ij} = 2G \sum_{i=1}^{n_y-n_{yk}} \left(\sigma_{k+(i-1)n_x} - \sigma_{k+(i-1)n_x+n_x} \right) \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k+(i-1)n_x}}{x_{[k+(i-1)n_x]1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k+(i-1)n_x}}{x_{[k+(i-1)n_x]2}} + \right. \tag{16}$$

$$2G\sigma_{k+(n_y-n_{yk})n_x} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k+(n_y-n_{yk})n_x}}{x_{[k+(n_y-n_{yk})n_x]1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{k+(n_y-n_{yk})n_x}}{x_{[k+(n_y-n_{yk})n_x]2}} \right) \quad (i = 1 \dots m; j = 1 \dots n)$$

$$A_{ij} = 2G\sigma_k \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{y_k}{x_{k1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_k}{x_{k2}} \right) \quad (i = 1 \dots m; j = 2n - n_x + 1 \dots 2n) \tag{17}$$

(16)和(17)两式中 $k = j - n$ 。

4 反演试验

例1 模型1的初始模型和反演结果参数见表1和图2。

例2 模型2的初始模型和反演结果见表2和图3。

表1 模型1的初始及反演模型参数

编号	密度/ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$		深度/km	
	初始模型	反演结果	初始模型	反演结果
1	1.800	0.799 859 6	3.000	1.917 200
2	1.400	0.400 066 1	2.500	2.001 480
3	1.700	0.699 910 8	2.700	1.978 837
4	2.800	0.997 963 5	6.000	4.015 296
5	2.300	1.303 510 2	5.700	3.987 912
6	2.400	1.397 756 1	5.500	4.009 453

表2 模型2的初始及反演模型参数

编号	密度/ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$		深度/km	
	初始模型	反演结果	初始模型	反演结果
1	1.500	0.800 067	3.100	2.001 850
2	1.000	0.400 419	3.100	2.006 941
3	1.400	0.700 094	3.100	2.000 033
4	1.500	1.001 022	6.100	4.003 319
5	1.620	1.311 800	6.100	4.056 632
6	1.810	1.399 303	6.100	4.031 346
7	1.000	0.508 376	8.000	4.928 452
8	1.000	0.795 483	8.000	5.078 300
9	1.100	0.597 645	8.000	4.831 995

5 结论

本文为了定量地直接地反演密度及其界面,将研究区域划分成许多固定宽度而厚度可任意变化的矩形网格,建立了以矩形网格厚度和密度为模型参数的反演目标函数,使得同时反演密度及其界面成为可能。原则上只要将网格划分得足够密,就可反演任意多层界面的二维密度模型,也可将网格固定即已知密度界面而只反演密度,或已知网格密度即已知密度分布而反演其界面即网格厚度,十分灵活方便。

在用脊回归法反演的过程中,求偏导数矩阵采用网格厚度作模型参数,和以网格坐标为模型参数求偏导数矩阵相比,迭代过程要稳定得多,但后者计算比较简单。

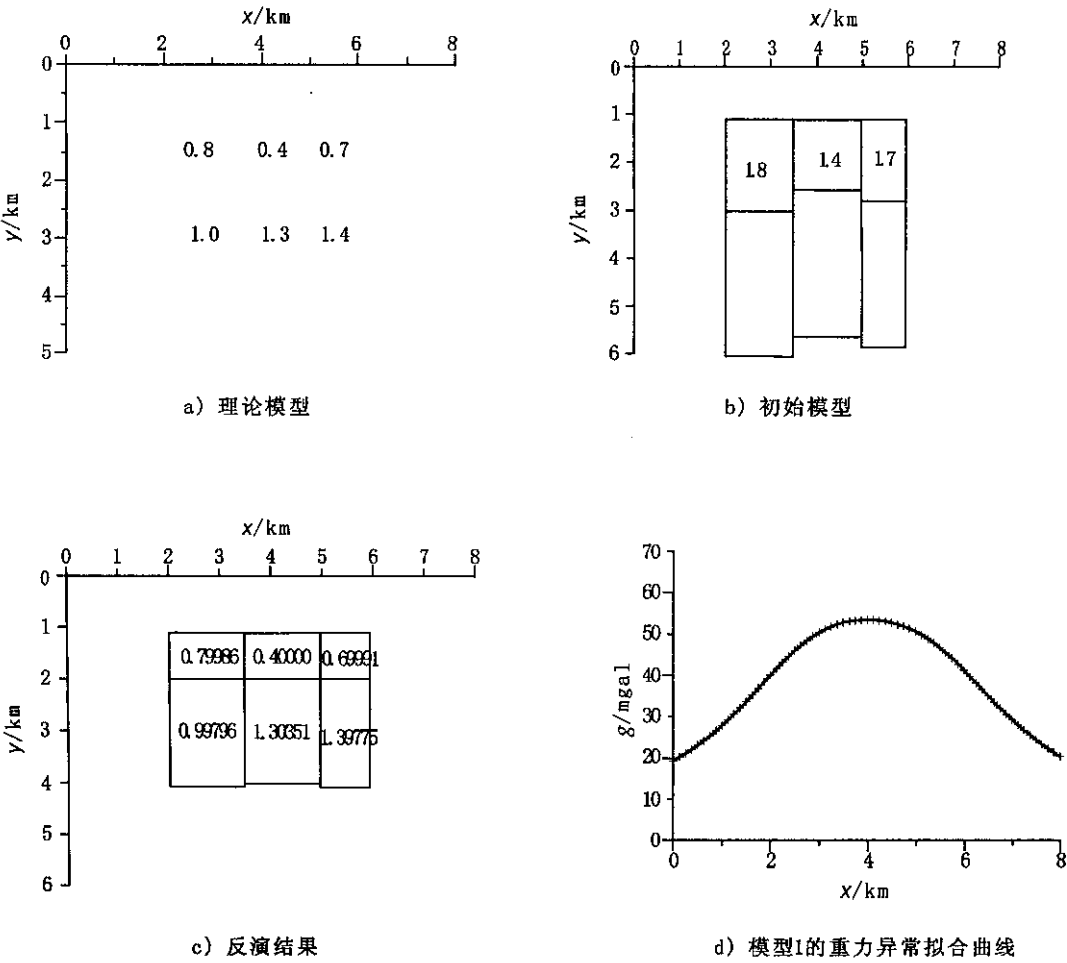


图2 模型1反演结果((a)(b)和(c)中网格内数值为密度值/ $\text{g} \cdot \text{cm}^3$)

Fig.2 The inversed result for Model 1.

[参考文献]

[1] 杨长福,林长佑,陈军营,等.用 Occam 法及广义逆法对兰州地区 MT 资料进行一维反演解释[J].西北地震学报,2002,24(4):289-294.

[2] Marquardt D W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters[J]. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1963, 11: 431-441.

[3] Johansen H K. A men/computer interpretation system for resistivity soundings over a horizontally stratified earth[J]. Geophysics Prospecting, 1977, 25(4): 667-691.

[4] Meju M A. An effective ridge regression procedure for resistivity data inversion[J]. Computers & Geosciences, 1992, 18(2/3): 99-118.

[5] Chakravarthi V, Singh S B, Babu G A. INVER2DBASE - A program to compute basement depths of density interface above which the density contrast varies with depth[J]. Computers & Geosciences, 2001, 27: 1127-1133.

[6] 王家林,王一新,林桂康.利用场变换的分离场法反演多层密度界面[J].石油物探,1986,25(2):69-80.

[7] 王一新,王家林,张曙明.研究多层密度界面的正则化非线性反演方法[J].石油物探,1987,26(1):78-90.

[8] 陈胜早.多层变密度模型与壳幔结构研究[J].中国科学(B辑),1989(9):991-1000.

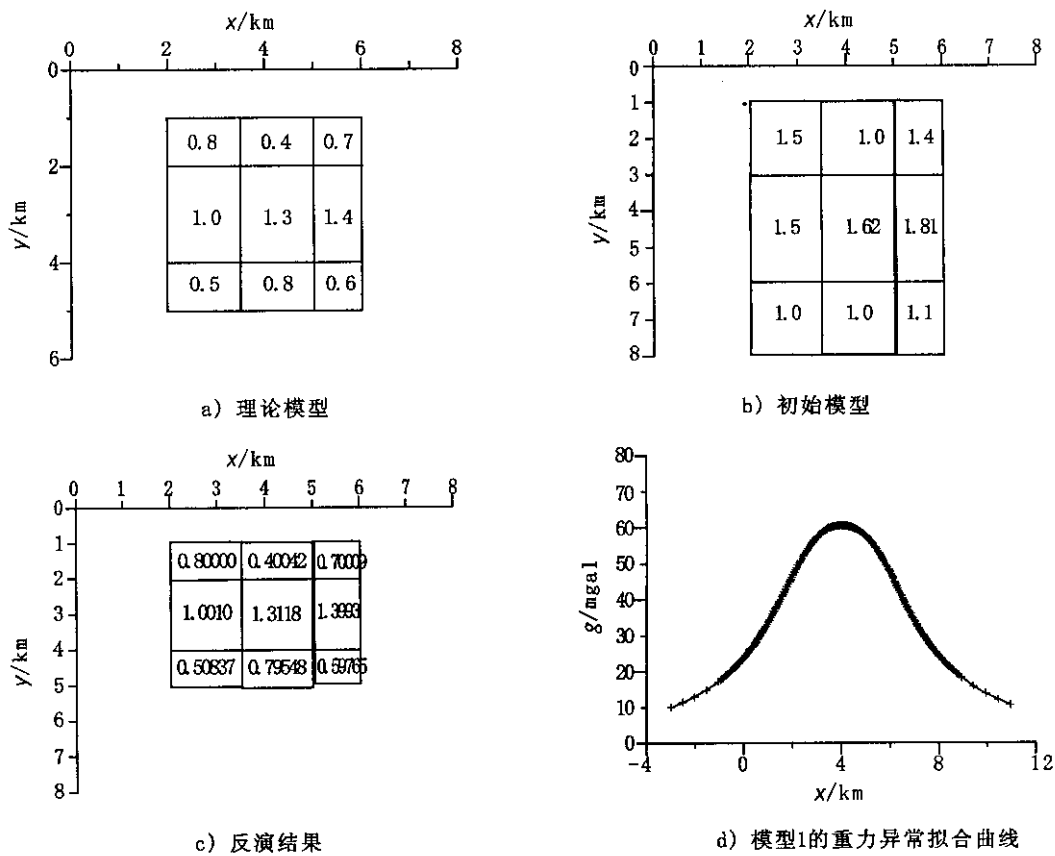


图3 模型2反演结果((a)(b)和(c)中网格内数值为密度值/ $\text{g} \cdot \text{cm}^3$)
Fig.3 The inversed result for Model 2.

INVERSION OF GRAVITY ANOMALY FOR MULTI – LAYERED
DENSITIES AND THEIR INTERFACES BY
RIDGE REGRESSION PROCEDURE

YANG Chang-fu

(Department of Earth Science , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China)

Abstract : The research region is divided into many rectangles with fixed width , and densities and thicknesses of the rectangle units are taken as model parameters. On this base , the objective function of inversion of gravity anomaly is formed , and the partial derivative tensors for the model parameters are also calculated. Then the Ridge Regress Procedure is employed to inverse gravity anomaly in order to obtain the densities and their inter-
faces. The method is used in inversion test for two theoretical models.

Kew words : Ridge Regression Procedure ; Gravity anomaly ; Inversion.