

面向欠约束几何系统的一种同伦求解方法

彭小波 陈立平 周 济

(华中科技大学国家CAD支撑软件工程研究中心, 武汉 430074)

摘 要 针对几何约束系统的数值求解过程中,经常发生的数值不稳定性问题,构造了一种面向欠约束系统的同伦方法,并将其与现有的求解与分解方法有机地结合起来,提出了一种牛顿-同伦混合方法,在牛顿迭代失败的位置自动调用欠约束同伦法,既提高了几何约束求解器的效率,同时又保证了求解的效率。

关键词 参数化 欠约束 约束求解 同伦法 约束分解

中图分类号: TP391.72 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2002)09-0956-06

Solving Under-constrained Geometric System by Homotopy Method

PENG Xiao-bo, CHEN Li-ping, ZHOU Ji

(National CAD Support Software Engineering Research Center, Wuhan 430074)

Abstract When a geometric constraint system can not be fully decomposed, numerical solving methods are used, in which Newton-Raphson iteration method is the most popular. However, Newton-Raphson iteration method is not stable. To improve the stability of numerical geometric constraint solving, an homotopy method, named under constrained homotopy, is advanced in the paper especially for under-constrained geometric system. It can be combined with the decomposition of geometric constraint system and can be used together with other solving methods easily, and thus helps to the solving ability of geometric constraint solver. Some key problems of under constrained homotopy, such as construction of the homotopy function, homotopy path tracing and singularity analysis of homotopy path, are discussed in the paper. A pure homotopy method for under-constrained geometric systems is not very effective. To solve this problem, a hybrid Newton-Homotopy method is proposed. It makes use of both the fastness of Newton-Raphson iteration method and the stability of homotopy method and thus improves both the ability and the efficiency of the geometric constraint solver.

Keywords Parametric design, Under-constrained system, Constraint solving, Homotopy method, Constraint decomposition

0 引 言

几何约束求解器的研究是目前CAD系统研发的关键技术之一。众所周知,几何约束满足问题,最后往往化为非线性约束方程组的求解问题。其中,对于低次方程(组),可以直接得到问题的解析解;但对于高次方程,则数值求解是不可避免的。为进行数值求解,最普遍采用的一种方法是牛顿迭代法,比如Gossard提出的方法^[1]。一般情况下,这种方法收敛

速度非常快,有很好的通用性,而且非常适合编程实现。但是,随着约束求解器的应用领域逐渐向三维空间延伸,牛顿法如下的缺点越来越不可容忍,即收敛性一般,且对系统求解的初始值要求很高。二维环境下的设计过程一般是设计者先勾画草图,然后施加约束进行设计,由于此时往往系统的初始条件良好,从而牛顿法能够很快得到解,但三维几何设计不一样,由于设计者在初始设计阶段的随意性,往往使得系统的初始条件不好,从而使牛顿法难以收敛,并由此带来如下问题,即无法判断这种无解情况的产生

基金项目:国家863计划自动化领域项目(9842-003)

收稿日期:2002-06-13;改回日期:2002-07-24

是因为系统本身不满足约束条件,还是由于求解算法自身的缺陷所致.对于用户而言,此时最好的办法就是不断调整系统的初始位置,并判断到底是哪种原因造成了求解失败.虽然目前几乎所有的CAD系统都属于交互式系统,但不可否认,这将会给用户带来极大的不便.例如牛顿法在下面两个包含闭环约束的数值求解过程中,就遇到了困难:(1)在图1(a)所示的双三角架装配中,由于杆件的初始位置离解位置太远,因而造成求解失败.若变动杆件5到如图1(b)所示的位置,则求解成功,如图1(c)所示;(2)对于图2所示的例子,3个杆件可根据3个共点关系,通过3个球铰连成一个三角架,在本文的求解器中,无论杆件的初始形位如何,单纯采用牛顿-拉普逊方法始终不能使其闭合.

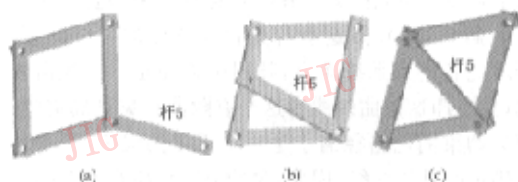


图1 双三角架装配



图2 牛顿迭代法求解球铰失败

对此,国内有很多学者也在求解方法方面做了大量的工作,比如葛建新就采用优化方法来求解约束方程组,从而将约束求解问题转化为优化问题^[2];康有树采用序列二次规划的方法来求解三维装配约束,也取得了较好的效果^[3].

同伦方法虽然也属于数值方法范畴,但它自20世纪70年代发展起来,就因为其良好的通用性和稳定性而在非线性方程组求解方面得到了很好的应用^[4,5].特别是在非线性很强的化工领域,同伦连续法得到了广泛的应用^[6].Morgan、Wampler和Sommese将同伦方法用于机器人和运动学领域^[7,8],也取得了很好的效果.另外,同伦法也在几何约束满足问题中得到应用^[9,10],但对于欠约束问题考虑不太充分.本文针对约束方程组数值求解的稳定

性和收敛性问题,提出了一种针对欠约束系统的牛顿-同伦混合算法,实际应用表明,该算法具有稳定高效的特点.

1 同伦方法概述

对于从 $n+1$ 维到 n 维的光滑映射 $H(t, X): [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,如果存在 $H(0, X) = G(X)$, $H(1, X) = F(X)$,则称 $H(t, X)$ 为将 $G(X)$ 光滑形变到 $F(X)$ 的一个同伦;称 $G(X)$ 为辅助函数;称 $t \in [0, 1]$ 为同伦参数.

为叙述方便,将任意映射 $J(X)$ 的零点集 $\{X | J(X) = 0\}$ 表示为 $J^{-1}(0)$.由同伦定义可知, $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$ 为 $n+1$ 维带边流形;根据逆像定理^[11]可知,如果0是原映射 $F(X)$ 及其边界映射 ∂F 的正则值,则 $H^{-1}(0)$ 要么为空,要么为一维带边流形.也就是说, $H^{-1}(0)$ 要么为空,要么为一维曲线.

对于每个 $t \in [0, 1]$, $H^{-1}(0)$ 构成了一条始于 $(0, X_0)$ 止于 $(1, X_1)$ 的轨迹

$$H^{-1}(0) = \{(t, X) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n | H(t, X) = 0\}$$

称为同伦路径.其中, X_0 是 $G(X) = 0$ 的解, X_1 是 $F(X) = 0$ 的解.

显然,从 $(0, X_0)$ 开始跟踪同伦路径,就可以得到同伦路径与 $t=1$ 超平面的交点 $(1, X_1)$, X_1 就是 $F(X)$ 的一个解.于是同伦方法的基本思想可以归纳为:如果已知辅助函数 $G(X)$ 在 $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ 的零点集 $\{0\} \times G^{-1}(0)$,则利用同伦 $H(t, X)$ 的零点集 $H^{-1}(0)$ (同伦路径),就可以跟踪到原映射 $F(X)$ 在 $\{1\} \times \mathbb{R}^n$ 中的零点集 $\{1\} \times F^{-1}(0)$.其中,比较简单常见的同伦是如下的线性同伦:

$$H(t, X) = tF(X) + (1-t)G(X) = 0$$

一般来说,线性同伦中 $G(X)$ 的解已知或者非常容易得到解的形式.最常用的形式,即所谓的定点同伦为

$$H(t, X) = tF(X) + (1-t)(X - X_0) = 0$$

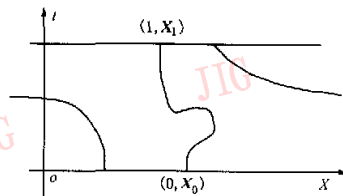


图3 同伦路径

所示.

2 欠约束系统的同伦构造

由于对欠约束系统而言,求全部解是没有意义的,因此,只需要讨论求解单个零点的情况.一般的同伦法要求原映射的雅可比矩阵为满秩方阵.将其推广,如果只要求雅可比矩阵行满秩,就可以将同伦应用于欠约束问题的求解.一般构造针对欠约束系统的同伦形式需要满足下述条件:(1)同伦与原约束方程组方程个数相同;(2)辅助映射应包含对所有未知量的影响;(3)将几何实体的当前位置作为起始点.

当系统或者子系统处于欠约束状态时,如果变量个数为 n ,约束方程个数为 $m(n > m)$,约束方程组 F 为: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$,那么构造的同伦应为 $H(t, X): [0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.仍然作线性同伦:

$$H(t, X) = tF(X) + (1-t)G(X) = 0$$

若取 $G(X)$ 为当前的约束值与起始点的约束值之差: $G(X) = F(X) - F(X_0)$,则同伦可写为:

$$H(t, X) = F(X) - (1-t)F(X_0) = 0$$

称为欠约束同伦.其中, X_0 可取几何系统在计算开始时的当前位置.由此明显可见,欠约束同伦满足了欠约束同伦形式的3个条件.

性质1 对几乎所有的 (t, X) , 0 同时为原映射 $F(X)$ 和欠约束同伦 $H(t, X)$ 的正则值.

证明 经过系统有效性维护,系统不再存在冗余奇异,但不排除某些奇异构型,也就是说,除某些奇异的特殊构型外,在几乎所有的形位上,0 都是 $F(X)$ 的正则值,即 $\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)$ 行满秩,有 $\text{Dim}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) = m$, Dim 表示矩阵的行秩.考虑欠约束同伦的雅可比矩阵

$$\frac{\partial H}{\partial(t, X)} = \begin{bmatrix} F(X_0) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial X} \end{bmatrix}$$

因为 $\text{Dim}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) = m$,故而对于几乎所有的 X ,均有

$$\text{Dim}\left(\frac{\partial H}{\partial(t, X)}\right) = \text{Dim}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) = m$$

从而 $\left(\frac{\partial H}{\partial(t, X)}\right)$ 行满秩.

性质2 欠约束同伦的同伦路径为 $k = n + 1 - m$ 维光滑流形,即为 k 维超曲面.

证明 由性质1可知,0 是 $H(t, X): [0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的正则值,直接应用逆像定理^[1]可知,其同伦路径为 $k = n + 1 - m$ 维光滑流形,并可以将其看作是起于 $t = 0$,终于 $t = 1$ 的 k 维超曲面 S_H ,如图4

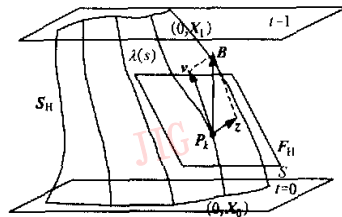


图4 欠约束系统同伦路径

3 欠约束同伦路径跟踪的局部逐步逼近法

欠约束同伦路径跟踪的思想是从 $(0, X_0)$ 开始,沿着超曲面 S_H 上某一条向上的曲线 $\lambda(s)$ 直到某个可行解 $(1, X_1)$.但这里首先存在这样一个问题,即对完备约束系统而言,其同伦路径是一维光滑曲线(集),即这条曲线或者这个有限曲线集是确定的;而欠约束同伦路径由于是一个无限曲线集,没有一条确定的具体曲线,因此,欠约束同伦路径跟踪的首要任务就要确定一条具体的曲线 $\lambda(s)$.

对于欠约束系统,由于像完备约束系统那样,事先从整体上得到曲线的微分方程是行不通的,因此,本文采用局部逐步逼近法来确定同伦路径 $\lambda(s)$,具体思想如下:

假设已经得到了 $\lambda(s)$ 上的一点 $P_k(t_k, X_k)$,如果知道了在 $P_k(t_k, X_k)$ 处的前进方向 v ,即已知超曲面 S_H 在 $P_k(t_k, X_k)$ 处的某个切线方向 v ,那么就可以得到 $\lambda(s)$ 上的下一个点 $P_{k+1}(t_{k+1}, X_{k+1})$,而所有 $P_k(t_k, X_k)$ 点就组成了同伦路径 $\lambda(s)$.

现在问题的关键变成:如何确定超曲面 S_H 上 $P_k(t_k, X_k)$ 处的切线方向 v .由于超曲面 S_H 上某点处的切线是无穷的,因此必须按照某个准则选取切线方向.

在确定的切向量选取准则下,超曲面 S_H 上的同伦路径 $\lambda(s)$ 实际上就确定了.在下面的讨论中可以将 $\lambda(s)$ 当作已知,因为这样做对路径跟踪没有影响.

欠约束同伦路径跟踪采用预估-校正方法来由 $P_k(t_k, X_k)$ 确定 $P_{k+1}(t_{k+1}, X_{k+1})$,如图5所示.令 $Z = (t_k, X_k)$,则对于 $\lambda(s)$ 上的一点 $P_k(t_k, X_k)$,有

$$\frac{dZ}{ds} = v = \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix}$$

于是, $\lambda(s)$ 可以由下面的初值问题来求解:

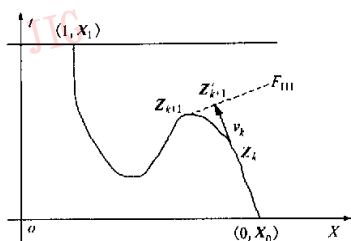


图5 同伦路径跟踪的预估与校正

$$\begin{cases} \dot{Z} = v \\ Z_0 = (0, X_0) \end{cases}$$

假设点 $P_k(t_k, X_k)$ 处的 v 已经由下节将要给出的方法得到。这样,可以采用一般微分方程求初值的方法,在本文的求解器中,采用标准龙格-库塔方法来求得 $\lambda(s)$ 上的下一个预测点 Z'_{k+1} 。在进行下一次迭代之前,需要对 Z'_{k+1} 进行校正。由于对一定的龙格-库塔迭代步长,不会离超曲面 S_H 很远,因而下面所采用的牛顿迭代校正公式的收敛性可以得到保证:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial Z}(Z_{k+1}) \\ v_k \end{bmatrix} (Z'_{k+1} - Z_{k+1}) = \begin{bmatrix} -H(Z_{k+1}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ Z^0_{k+1} = Z'_{k+1} \end{cases}$$

令:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial Z}(Z_{k+1}) \\ v_k \end{bmatrix}$$

则校正迭代公式为:

$$\begin{cases} Z^+_{k+1} = M^+ \begin{bmatrix} -H(Z_{k+1}) \\ 0 \end{bmatrix} + Z'_{k+1} \\ Z^0_{k+1} = Z'_{k+1} \end{cases}$$

其中, M^+ 为 M 的广义逆。根据广义逆的几何意义,该迭代公式表示从 Z'_{k+1} 开始,在与 v_k 垂直的超平面 F_{H1} 上,沿着 $H(Z_{k+1})$ 下降最快的方向,寻找超曲面 S_H 上的同伦函数的零点。取该零点为 Z_{k+1} ,然后开始下一轮的预估校正。

这个过程中,需要注意如下几个问题:

(1) 步长调节

如果龙格-库塔的步长过长,那么紧接着的牛顿迭代校正就可能不收敛;而如果步长过小,则对于“平坦”的超曲面 S_H ,又会无端增加计算量。由于牛顿法是局部二次收敛的,因此如果

$$10 \cdot \|H(Z^+_{k+1}) - H(Z_{k+1})\| > \|H(Z_{k+1}) - H(Z^+_{k+1})\|$$

则牛顿法不收敛,此时需要将求取 Z'_{k+1} 的步长减半,

直到校正收敛。而如果连续两次龙格-库塔运算的步长相同,说明超曲面 S_H 较为“平坦”,则可将下一次的步长加倍。

(2) 路径跟踪的终止

当路径曲线与 $t=1$ 的超平面可能会出现如下两种相交情况,如图 6(a)、(b) 所示:对于图 6(a) 的情况,即如果

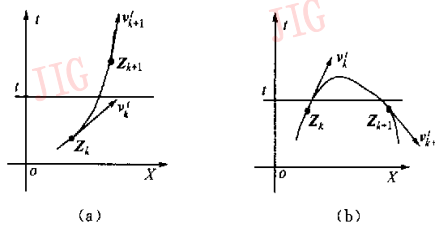
$$\begin{cases} t_k < 1 \\ t_{k+1} > 1 \\ v'_k = \frac{\partial H}{\partial t}(Z_k) > 0 \\ v'_{k+1} = \frac{\partial H}{\partial t}(Z_{k+1}) > 0 \end{cases}$$

则用 $h = h \cdot \frac{1-t_k}{t_{k+1}-t_k}$ 先进行线性插值,其中, h 为计算 Z_{k+1} 的龙格-库塔步长;然后重新计算 Z_{k+1} ,直到 $|t_{k+1}-1| < \varepsilon$,其中, ε 为计算精度。对于图 6(b) 的情况,即如果

$$\begin{cases} t_k, t_{k+1} < 1 \\ v'_k = \frac{\partial H}{\partial t}(Z_k) > 0 \\ v'_{k+1} = \frac{\partial H}{\partial t}(Z_{k+1}) < 0 \end{cases}$$

则用 $h = h \cdot \frac{v'_k}{v'_k - v'_{k+1}}$ 进行线性插值,其中, h 意义同上,然后重新计算 Z_{k+1} 。

由此可以看出,在逐步逼近跟踪的过程中,因为前后两次龙格-库塔迭代之间没有误差累积,整个过程的误差等于一次牛顿迭代校正的误差,所以其精度与牛顿法相同。

图6 同伦路径与 $t=1$ 超平面的交点

4 欠约束同伦路径切向量的确定

考虑 $\lambda(s)$ 上的一点 $P_k(t_k, X_k)$, 如图 4 所示。设超曲面 S_H 在 P_k 处的切面为超平面 F_H , 显然, F_H 由 $\frac{\partial H}{\partial(t, X)}(t_k, X_k) \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} = 0$ 决定。令 $A = \frac{\partial H}{\partial(t, X)}(t_k, X_k)$,

$v = \begin{bmatrix} t \\ \bar{x} \end{bmatrix}$, 则 F_H 可以表示为 $Av = 0$, 即 S_H 在 P_i 点处的切超平面 F_H 为 A 的零空间 $N(A)$.

如果能在 F_H 取一个切向量 v , 使得跟踪过程在 P_i 点沿着 v 的方向能向 $t=1$ 的超平面逼近. 显然, 这样的切向量有无数条, 应该选取其中逼近最快的一条.

在图4中, 考虑点 P_i 在 F_H 上的领域 σ , 如果取向量 $B = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, 并将 B 向 F_H 投影得到切向量 v , 那么在 σ 上, 跟踪过程沿着 v 在 t 的方向上, 向 $t=1$ 的超平面逼近最快.

性质3 设 A 的零空间 $N(A)$ 的正交补空间为 $N^\perp(A)$, 则对于超曲面 S_H 上的几乎所有的点 $P_i(t_k, X_k)$, 向量 $B = (1, 0, \dots, 0)^T \in N^\perp(A)$.

证明 由性质1可知, 对于几乎所有的点 $P_i(t_k, X_k)$, 0 都是原约束系统的正则值, 即 $\text{Dim}\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{x}}\right] = m$, 考虑到

$$\frac{\partial H}{\partial(t, \bar{x})} = \begin{bmatrix} F(X_0) \cdots \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix}$$

因此, 向量 B 不能用 A 的行向量组合来表达, 即对任意的 x , 有 $A^T x \neq B$. 再由 $Av = 0 \Rightarrow v^T A^T = 0$, 即对任意的 x , 有 $v^T A^T x = 0$. 则 $v^T B \neq v^T A^T x \Rightarrow v^T B \neq 0$, 这说明, B 不与 F_H 上任意的切向量 v 垂直, 即 B 不与 F_H 垂直, 可得 $B \notin N^\perp(A)$.

求取切向量 v 方法如下: 设向量 z, v 分别为 B 在 $N^\perp(A)$ 和 $N(A)$ 上的投影, 三者满足平行四边形法则

$$B = v + z$$

两边同乘以 A , 有

$$AB = Av + Az = Az$$

从而可以得到

$$z = A^+ A B$$

其中, A^+ 为 A 的广义逆. 从几何上看, 由于 $A^+ A$ 表示是在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 空间沿 $N(A)$ 向 $N^\perp(A)$ 的正交投影, 因此, $(A^+ A) B$ 表示 B 在 $N^\perp(A)$ 上的投影. 再由 $B = v + z$ 可得到: $v = B - z$. 一般可将 v 单位化:

$$v = \frac{B - z}{\|B - z\|}.$$

当然, 也可以用上一个点的切向量作为 B 向量参与运算, 但显然这在 t 方向上的逼近不是最快的. 实际应用中, 也证明采用 $B = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ 比那样做能成倍地减少迭代次数.

5 奇点与单调性

在各点的切向量确定以后, 欠约束系统的同伦

路径跟踪问题和完备系统就没有区别了. 但仍然存在如图7所示的两个问题.

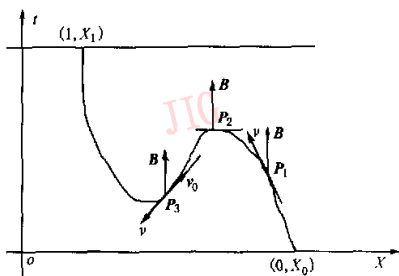


图7 同伦路径的奇点与单调性

虽然在路径 $\lambda(s)$ 上几乎所有的点都使得系统正则, 但不能排除 $\lambda(s)$ 上存在奇点的可能, 从而也就不能保证 $\lambda(s)$ 关于 t 全程单调增加. 如图7中的 P_2 点处, 若 $\text{Dim}\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{x}}\right] < m$, 则 B 垂直于点 P_2 处的切超平面, 此时, 按照上节得方法得不到切向量 v . 而在 P_3 点, 由于 $\lambda(s)$ 关于 t 单调递减, 从而按照上节的方法得到的切向量 v_0 与实际的前进方向 v 相反.

这里讨论奇点 P_2 发生的情况. 设在 $\lambda(s)$ 上, P_2 前面的点为 P' . 由于整个同伦路径是连续的, 因此, 当步长足够小时, P' 处的切向量 v' 和 P_2 处的切向量 v 角度差别不大, v' 不会垂直于点 P_2 处的切超平面, 从而可以用 v' 代替 B 来求解 v .

虽然这种方向的细微改变可能会让后面的同伦路径发生变化, 但这对整个求解过程没有影响.

对于 $\lambda(s)$ 关于 t 单调递减的路径段, 如 P_3 点处, 依然可以利用 v', v' 的意义上. 如果 v 和 v' 的夹角大于 90° , 即如果

$$v \cdot v' < 0$$

则说明 $\lambda(s)$ 对 t 处于下降段, 可取

$$v = -v'$$

前后两点的切向量之间应该能保证夹角不能太大, 实际应用显示时, 一般 15° 能满足要求, 故可取

$$v \cdot v' > 0.97$$

如果不能满足上式, 则可以将上次的龙格-库塔迭代的步长减半, 重新计算 Z_{k+1} 和 v .

6 混合求解

与牛顿法相比, 同伦连续法具有良好的收敛性和稳定性. 另外, 同样重要的是, 同伦方法还具有一个和牛顿法相同的性质, 即可以和解过程紧密结

合。从几何约束系统的分解过程可以知道,系统并不是每次都能达到最大分解,也就是说,可能会存在必须联立数值求解的求解单元。由于同伦方法可以很方便地得到约束值、约束残量、求解单元的同伦雅可比矩阵,从而可很好地与分解过程结合起来。

但同伦法也有一个缺点,就是速度较牛顿法慢。因为一般而言,同伦法需要上百步的迭代。为此,本文采用牛顿法和同伦法相结合的混合法来求解。即在牛顿法不能求解的情况下,就自动调用同伦法。这样做有3个好处:(1)既满足了系统的求解速度,又能保证对复杂系统的求解能力;(2)虽然牛顿法可能会发散,但其趋势总是逼近系统的解;在牛顿法失效时再调用同伦法,与从一开始就调用同伦法相比,同伦路径可以大为缩短,从而可以大大减少同伦法的迭代次数;(3)从牛顿雅可比矩阵扩充到同伦雅可比矩阵非常简单,比如在欠约束同伦下,只需增加一列同伦开始点的约束残量即可,即

$$\begin{aligned} g_{H1} &= \frac{\partial H}{\partial(t, X)}(t, X) = \left[\frac{\partial H}{\partial t}(t, X) \cdots \frac{\partial H}{\partial X}(t, X) \right] \\ &= \left[\frac{\partial H}{\partial t}(t, X) \cdots \varphi_F \right] = [F(X_0) \cdots \varphi_F] \end{aligned}$$

图8是采用这种混合求解方法对图2所示的球铰求解的结果以及另外一个空间RSSR结构的求解实例。对于图8中两个例子的不同初始位置条件,表1为采用不同的求解方法求解,最后得到的闭环约束的效果统计。从表1可以看出,采用混合求解算法可使求解效率有较大幅度的提高。

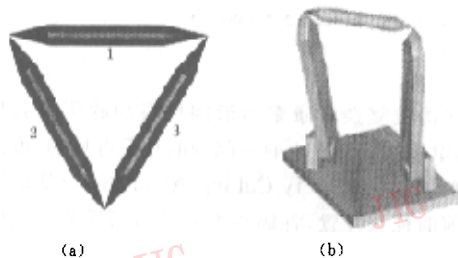


图8 欠约束同伦法求解示例

表1 求解效果比较(运行环境:PⅡ600,128M内存)

		牛顿法	欠约束同伦法	牛顿-同伦混合法
图8(a)	收敛性	不收敛	收敛	收敛
	求解时间(s)	—	<100	<5
图8(b)	收敛性	大部分情况下不收敛	收敛	收敛
	求解时间(s)	<1(收敛时)	<60	<3

7 小结

本文针对牛顿法求解的收敛性问题,将同伦连续法应用于欠约束系统的求解,并讨论了同伦法应用于欠约束系统求解时会遇到的一些问题;最后针对同伦法速度较慢的特点,提出了牛顿-同伦混合算法,实践证明,这种方法能较大地提高求解器的求解能力与效率。

参考文献

- 1 Light R, Gossard D. Modification of geometric models through variational geometry[J]. Computer Aided Design, 1982, 14(4): 209~214.
- 2 Ge Jian-Xin, Chou Shang-Ching, Gao Xiao Shan. Geometric constraint satisfaction using optimization methods[J]. Computer Aided Design, 1999, 31: 867~879.
- 3 康有树. 变量转配设计原理及方法研究[D]. 武汉:华中理工大学博士论文, 1996. 9.
- 4 王则柯, 高安堂. 同伦方法引论[M]. 重庆:重庆出版社, 1990.
- 5 廖世俊. 同伦分析方法:一种新的求解非线性问题的近似解析方法[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(10): 885~890.
- 6 万锡仁. 计算非线性方程组所有解地同伦连续法[J]. 南京化工学院学报, 1994, 16(13): 88~94.
- 7 Morgan A P. Solving polynomial systems using continuation for scientific and engineering problems[M]. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1983.
- 8 Wampler C W, Morgan A P, Sommese A F. Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics[J]. ASME J. on Design, 1990, 112: 59~68.
- 9 Hoffmann C M, Vermeer P J. A spatial constraint problem[A]. In: Workshop on Computational Kinematics [C]. France. Sophia-Antipolis, INRIA, 1995.
- 10 Herve Lamure, Dominique Michelucci. Solving geometric constraints by homotopy [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1996, 2(1): 28~34.
- 11 Naber G L. Topological methods in euclidean spaces [M]. Cambridge Univ. Press, London, 1980.
- 12 孙平, 严静, 陈永. 基于改进路径跟踪的同伦算法及在机构学中的应用[J]. 机械传动, 1996, 21(2): 1~3.



彭小波 1972年生, 2000年获华中科技大学博士学位。主要研究方向为几何约束求解、参数化设计。

陈立平 1964年生, 博士, 教授。主要研究领域为几何约束求解、智能CAD系统、机械系统动力学。

周济 1946年生, 中国科学院院士, 博士生导师。主要研究方向为CAD/CAM系统、优化设计。