

粒计算下的粗糙集模型比较 *

张小峰, 邹海林, 贾世祥

(鲁东大学 信息科学与工程学院, 山东 烟台 264025)

摘 要: 提出了几种组合粒下的粗糙集模型, 并将其与单一粒下的粗糙集进行了比较, 同时与粒逻辑运算下的粗糙集模型进行了对比, 创造性地得到了组合粒、单一粒以及粒逻辑运算下的粗糙集模型之间的关系。结果表明, 组合粒与粒逻辑运算组成了一个链结构, 这为研究基于信息粒的知识获取以及动态粒的推理奠定了基础。

关键词: 组合粒; 粒逻辑运算; 单一粒; 粗糙集; 近似

中图分类号: TP18

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2010)07-2401-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.07.001

Comparison of rough set model under granular computing

ZHANG Xiao-feng, ZOU Hai-lin, JIA Shi-xiang

(School of Information Science & Engineering, Ludong University, Yantai Shandong 264025, China)

Abstract: This paper proposed the rough set model under combination granule, and compared it with that under single granular, also with rough set model under logical computing of granule, which contributed to the relationship between rough set models under combination granule, singular granules and logical computing of granules. Results show that combination granule and logical computing of granule construct a chain, which will lay a foundation for knowledge acquisition based on information granule and induction based on dynamic granule.

Key words: combination granule; logical computing of granule; single granular; rough set; approximation

0 引言

粒度计算是由 Zadeh^[1] 于 1996 年提出, 他认为, 人类认识主要基于三个主要概念, 即粒度、组织和因果。其中粒度计算是一把伞, 涵盖了有关粒度计算的理论、方法论、技术和工具的研究, 在粗糙集理论、概念格、知识工程、数据挖掘、人工智能、机器学习等领域有潜在的应用, 已成为信息科学的研究热点之一^[2]。

粗糙集^[3] 定义为给定关系上集合的上近似与下近似构成的有序对, 已被成功地应用于机器学习、决策分析、过程控制、模式识别和数据挖掘等领域^[4]。传统的粗糙集理论是基于单一粒定义的, 即静态粒。文献[5~7] 提出了多粒运算下的粗糙集理论模型, 即 MGRS(multi-granulations rough set, MGRS), 并讨论了相关的数学性质。考虑到文献[5~7] 中主要讨论了集合在粒度 P 和 Q 的 $P+Q$ 、 $P\cap Q$ 运算下的上下近似集合, 本文对多粒运算下的粗糙集模型进行了进一步的讨论, 并将其与单一粒度下的粗糙集模型进行了比较; 同时, 将多粒运算下的粗糙集模型与组合粒度下的粗糙集模型进行了比较。

1 相关概念

本章给出的相关概念对于后续部分给出的讨论是必要的。

定义 1 命题逻辑中, 命题 P 和 Q 的合取记为 $P\wedge Q$ 。 $P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 同时为真; 命题 P 和 Q 的析取记为 $P\vee Q$, $P\vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 同时为假。

定义 2 信息系统是一个四元组 (U, A, V, f) 。其中, U 是对象的集合, 称为域(universe); A 是用来描述对象的属性的集合; V 是属性集 A 的值域; $f: U \times A \rightarrow V$ 反映的是某个对象在某个属性上的取值, 信息系统通常略写为 (U, A) 。

定义 3 给定一个非空的域 U , $U \times U$ 的子集 $E \subseteq U \times U$ 表示域 U 上的一个关系。有序对 (U, E) 称为一个近似空间^[8] (approximation space)。

如果关系 E 满足自反性、对称性和传递性, 则 E 称为一个等价关系^[9]。等价关系 E 对域 U 可以形成一个划分, 记为 U/E 。可以证明, 等价关系和划分是等价的, 即给定一个等价关系, 可以构造域的划分; 同样, 给定域的一个划分, 可以构造域上的一个等价关系。

信息系统 (U, A) 中, 如果两个个体 $x, y \in U$ 在属性 $a \in A$ 上取值相同, 则称两者在属性 a 上是不可分辨的。如果 x, y 在集合 $B \subseteq A$ 中的每一个属性 $b \in B$ 都是不可分辨的, 则称两者在集合 B 上是不可分辨的。与 x 在集合 B 上不可分辨的所有个体的集合称为 x 在集合 B 上生成的等价类, 记为 $[x]_B$, 它可以看成是由与 x 不可分辨的元素构成的信息粒^[8] (information granule)。

定理 1 域 U 上所有元素在集合 A 上生成的等价类满足以下三个条件^[9]:

a) $\forall x \in U$, 有 $[x]_A \neq \emptyset$;

b) $\forall x, y \in U$, 或者 $[x]_A = [y]_A$ 成立, 或者 $[x]_A \cap [y]_A = \emptyset$ 成立;

收稿日期: 2009-12-07; 修回日期: 2010-01-26 基金项目: 山东省自然科学基金资助项目(Y2008E11); 鲁东大学创新团队建设项目(08-CXB006)

作者简介: 张小峰(1978-), 男, 山东烟台人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为粗糙集理论、粒度计算、数据挖掘(iamzxf@126.com); 邹海林(1962-), 男, 山东烟台人, 教授, 博士, 主要研究方向为智能信息处理等; 贾世祥(1979-), 山东烟台人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为粒度计算、智能信息处理等。

c) $\bigcup_{x \in U} [x]_A = U$ 。

该定理表明,在集合 A 上生成的所有等价类构成了域的一个划分,这些等价类称为基本等价类。

定义 4 对域 U 的任一子集 $X \subseteq U$ 而言,如果它可以表示成某些等价类的并集,称 x 是精确的(或者称为可定义的),否则称为粗糙的。如果一个概念 $X \subseteq U$ 是粗糙的,则可以用两个精确定义的集合来近似,分别称为 X 的下近似或上近似,记为 $\underline{P}X$ 和 $\overline{P}X$,定义如下:

$$\underline{P}X = \bigcup_{[x]_P \subseteq X} [x]_P$$
$$\overline{P}X = \bigcup_{[x]_P \cap X \neq \emptyset} [x]_P$$

其中: $[x]_P = \{y | f(x, P) = f(y, P)\}$ 是由 x 在属性集 P 上生成的等价类。显然有下式成立:

$$\underline{P}X \subseteq X \subseteq \overline{P}X$$

定义 5 如果集合 X 是粗糙的,有序对 $\langle \underline{P}X, \overline{P}X \rangle$ 称为它的粗糙集。该粗糙集的近似质量 $\alpha_P(X)$ 定义如下:

$$\alpha_P(X) = |\underline{P}X| / |\overline{P}X|$$

2 几种基于粒运算的粗糙集模型

定义 6 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A$ 。假设由 P, Q 对域可以构造相应的划分为

$$U/\text{IND}(P) = \{[x_1]_P, [x_2]_P, \dots, [x_{|U|}]_P\}$$
$$U/\text{IND}(Q) = \{[x_1]_Q, [x_2]_Q, \dots, [x_{|U|}]_Q\}$$

则由 P 和 Q 构成的两个组合粒定义为

$$U/\text{IND}(P \cap Q) = \{[x_1]_P \cap [x_1]_Q, \dots, [x_{|U|}]_P \cap [x_{|U|}]_Q\} \quad (1)$$

$$U/\text{IND}(P \cup Q) = \{[x_1]_P \cup [x_1]_Q, \dots, [x_{|U|}]_P \cup [x_{|U|}]_Q\} \quad (2)$$

例如信息系统 (U, A) 中, $X \subseteq U$ 且 $P, Q \subseteq A$ 。其中 $U = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, $X = \{e_1, e_2, e_5, e_7, e_8\}$ 。由 P, Q 对域形成的划分分别为

$$U/\text{IND}(P) = \{\{e_1, e_7\}, \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \{e_8\}\}$$
$$U/\text{IND}(Q) = \{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_6, e_7, e_8\}\}$$

因此有

$$U/\text{IND}(P \cap Q) = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_6\}, \{e_7\}, \{e_8\}\}$$
$$U/\text{IND}(P \cup Q) = \left\{ \{e_1, e_2, e_7\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \right. \\ \left. \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}, \{e_1, e_6, e_7, e_8\}, \{e_8\} \right\}$$

定理 2 $U/\text{IND}(P \cap Q)$ 形成域的划分,而 $U/\text{IND}(P \cup Q)$ 形成域的覆盖。

证明 由于等价关系满足自反性,对由 P, Q 构造的等价类 $[x_i]_P$ 和 $[x_i]_Q$, 有 $x_i \in [x_i]_P$ 且 $x_i \in [x_i]_Q$ 。因此有 $\bigcup_{x_i} ([x_i]_P \cap [x_i]_Q) = \bigcup_{x_i} [x_i]_P \cup [x_i]_Q = U$ 成立,同时有 $[x_i]_P \cap [x_i]_Q \neq \emptyset, [x_i]_P \cup [x_i]_Q \neq \emptyset$, 即 $U/\text{IND}(P \cap Q)$ 和 $U/\text{IND}(P \cup Q)$ 形成了域的覆盖。

进一步考虑,如果 $x_j \in [x_i]_P \cap [x_i]_Q$, 如果 $x_j \neq x_i$, 则有 $x_j \in [x_i]_P, x_j \in [x_i]_Q$ 。由于 $[x_i]_P$ 和 $[x_i]_Q$ 均是等价类,根据定理 1 可得 $x_i \in [x_j]_P, x_i \in [x_j]_Q$ 成立,即 $x_i \in [x_i]_P \cap [x_i]_Q$ 成立。

如果 $x_j \notin [x_i]_P \cap [x_i]_Q$, 则可能有以下三种情况: a) $x_j \notin [x_i]_P, x_j \notin [x_i]_Q$; b) $x_j \notin [x_i]_P, x_j \in [x_i]_Q$; c) $x_j \in [x_i]_P, x_j \notin [x_i]_Q$ 。相应地,根据等价类的性质可得: a) $x_i \notin [x_j]_P, x_i \notin [x_j]_Q$; b) $x_i \notin [x_j]_P, x_i \in [x_j]_Q$; c) $x_i \in [x_j]_P, x_j \notin [x_i]_Q$, 因此有 $x_i \notin [x_j]_P \cap [x_j]_Q$ 。

通过上述两种情况可得,或者 $[x_i]_P \cap [x_i]_Q = [x_j]_P \cap [x_j]_Q$ 成立,或者 $([x_i]_P \cap [x_i]_Q) \cap ([x_j]_P \cap [x_j]_Q) = \emptyset$ 成

立,因此 $U/\text{IND}(P \cap Q)$ 构成了域的一个划分。

证毕。

定义 7 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 定义组合粒下的粗糙集如下:

$$\underline{P \cap Q}X = \bigcup_{([x]_P \cap [x]_Q) \subseteq X} ([x]_P \cap [x]_Q)$$
$$\overline{P \cap Q}X = \bigcup_{([x]_P \cap [x]_Q) \cap X \neq \emptyset} ([x]_P \cap [x]_Q)$$
$$\underline{P \cup Q}X = \bigcup_{([x]_P \cup [x]_Q) \subseteq X} ([x]_P \cup [x]_Q)$$
$$\overline{P \cup Q}X = \bigcup_{([x]_P \cup [x]_Q) \cap X \neq \emptyset} ([x]_P \cup [x]_Q)$$

文献[10]中曾经定义了粒逻辑运算下的粗糙集模型,如定义 8。

定义 8 给定信息系统 (U, A) , P 和 Q 是信息系统的两个信息粒,则粒逻辑运算下的粗糙集模型定义为

$$\underline{P \wedge Q}X = \bigcup \{x | ([x]_P \subseteq X) \wedge ([x]_Q \subseteq X)\}$$
$$\overline{P \wedge Q}X = \bigcup \{x | ([x]_P \cap [x]_Q \neq \emptyset) \wedge ([x]_Q \cap X \neq \emptyset)\}$$
$$\underline{P \vee Q}X = \bigcup \{x | ([x]_P \subseteq X) \vee ([x]_Q \subseteq X)\}$$
$$\overline{P \vee Q}X = \bigcup \{x | ([x]_P \cap [x]_Q \neq \emptyset) \vee ([x]_Q \cap X \neq \emptyset)\}$$

下面将讨论组合粒下的粗糙集与单粒下的粗糙集模型之间的关系以及组合粒下的粗糙集与粒逻辑运算下的粗糙集之间的关系。

3 单一粒与多粒运算下粗糙集的关系

笔者已经证明了下面的定理。

定理 3 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\underline{P \wedge Q}X = \underline{P}X \cap \underline{Q}X$$
$$\overline{P \wedge Q}X = \overline{P}X \cap \overline{Q}X$$
$$\underline{P \vee Q}X = \underline{P}X \cup \underline{Q}X$$
$$\overline{P \vee Q}X = \overline{P}X \cup \overline{Q}X$$

运用本文提出的组合粒,并将其与粒逻辑运算下的粗糙集模型进行进一步比对,可以得到下面的定理。

定理 4 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$ 则有

$$\underline{P \cap Q}X \subseteq \underline{P \cap Q}X$$
$$\overline{P \cap Q}X \subseteq \overline{P \cap Q}X$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \cap Q}X$, 根据定义有 $[x]_P \subseteq X$ 且 $[x]_Q \subseteq X$ 成立, 因此有 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq X$, 即 $x \in \underline{P \cap Q}X$ 成立。因此有 $\underline{P \cap Q}X \subseteq \underline{P \cap Q}X$ 。

b) $\forall x \in \overline{P \cap Q}X$, 有 $([x]_P \cap [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$ 。由于 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_P, [x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_Q$, 有 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 并且 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$, 因此有 $x \in \overline{P}X \cap \overline{Q}X$, 即 $\overline{P \cap Q}X \subseteq \overline{P}X \cap \overline{Q}X$ 。

证毕。

该定理说明两个粒度 P, Q 组合产生的商空间 $U/\text{IND}(P \cap Q)$ 比组合粒度 $P \wedge Q$ 构造的知识更细,因而对集合 X 的逼近更为准确。

定理 5 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\underline{P \cup Q}X = \underline{P}X \cap \underline{Q}X$$
$$\overline{P \cup Q}X = \overline{P}X \cup \overline{Q}X$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \cup Q}X$, 有 $[x]_P \cup [x]_Q \subseteq X$ 成立。由于 $[x]_P \subseteq [x]_P \cup [x]_Q, [x]_Q \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, 有 $[x]_P \subseteq X$ 和 $[x]_Q \subseteq X$ 成立, 即 $x \in \underline{P}X$ 且 $x \in \underline{Q}X$ 。因此有 $x \in \underline{P}X \cap \underline{Q}X$, 即 $\underline{P \cup Q}X \subseteq \underline{P}X \cap \underline{Q}X$ 成立。

$\forall x \in \underline{PX} \cap \underline{QX}$, 根据定义有 $x \in \underline{PX}$ 且 $x \in \underline{QX}$, 因此有 $[x]_P \subseteq X$ 和 $[x]_Q \subseteq X$ 成立。由于 $[x]_P \subseteq X$ 和 $[x]_Q \subseteq X$ 成立, 有 $[x]_P \cup [x]_Q \subseteq X$ 成立。因此有 $x \in \underline{P \cup QX}$, 即 $\underline{PX} \cap \underline{QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$ 。

综合上述两点可得 $\underline{P \cup QX} = \underline{PX} \cap \underline{QX}$ 。

b) $\forall x \in \underline{P \cup QX}$, 有 $([x]_P \cup [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$, 因此有 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 或 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$, 即 $x \in \underline{PX}$ 或 $x \in \underline{QX}$ 成立, $x \in \underline{PX} \cup \underline{QX}$ 。因而可得 $\underline{P \cup QX} \subseteq \underline{PX} \cup \underline{QX}$ 成立。

$\forall x \in \underline{PX} \cup \underline{QX}$, 有 $x \in \underline{PX}$ 或 $x \in \underline{QX}$ 成立, 即 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 或 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$ 。由于 $[x]_P \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, $[x]_Q \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, 可得 $([x]_P \cup [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$ 成立。因此有 $x \in \underline{P \cup QX}$, 即 $\underline{PX} \cup \underline{QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$ 。

根据上述两点可得 $\underline{P \cup QX} = \underline{PX} \cup \underline{QX}$ 。

证毕。

该定理表明组合粒 $P \cup Q$ 下的粗糙集模型可以由单一粒下的粗糙集模型构造出。

4 不同粒运算下的粗糙集模型的关系

既然可以在组合粒、粒逻辑运算等不同的粒运算下都可形式化相应的粗糙集, 那么产生一个问题: 不同粒运算下的粗糙集之间有什么关系?

定理6 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} \underline{P \cup QX} &\subseteq \underline{P \cap QX} \\ \underline{P \cap QX} &\subseteq \underline{P \cup QX} \\ \alpha_{P \cup Q} &\leq \alpha_{P \cap Q} \end{aligned}$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \cup QX}$, 有 $[x]_P \cup [x]_Q \subseteq X$, 因此可得 $[x]_P \subseteq X$ 且 $[x]_Q \subseteq X$ 。由此可以推断出 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq X$, 即 $x \in \underline{P \cap QX}$ 。因此有 $\underline{P \cup QX} \subseteq \underline{P \cap QX}$ 。

b) $\forall x \in \underline{P \cap QX}$, 根据定义有 $([x]_P \cap [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$; 又由于 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, 有 $([x]_P \cup [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$, 可得 $\forall x \in \underline{P \cup QX}$, 因此有 $\underline{P \cap QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$ 。

c) 由于 $\underline{P \cup QX} \subseteq \underline{P \cap QX}$, 有 $|\underline{P \cup QX}| \leq |\underline{P \cap QX}|$; 由于 $\underline{P \cap QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$, 有 $|\underline{P \cap QX}| \leq |\underline{P \cup QX}|$ 。因此, $\alpha_{P \cup Q} \leq \alpha_{P \cap Q}$ 。

证毕。

定理7 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} \underline{P \wedge QX} &\subseteq \underline{P \cap QX} \\ \underline{P \cap QX} &\subseteq \underline{P \wedge QX} \\ \alpha_{P \wedge Q} &\leq \alpha_{P \cap Q} \end{aligned}$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \wedge QX}$, 有 $[x]_P \subseteq X$ 且 $[x]_Q \subseteq X$ 成立, 因此可得 $([x]_P \cap [x]_Q) \subseteq X$ 成立。因此有 $\underline{P \vee QX} \subseteq \underline{P \cap QX}$ 。

b) $\underline{P \cap QX} = \cup \{x | ([x]_P \cap [x]_Q) \cap X \neq \emptyset\}$, $\underline{P \wedge QX} = \cup \{x | ([x]_P \cap X \neq \emptyset) \wedge ([x]_Q \cap X \neq \emptyset)\}$ 。

$\forall x \in \underline{P \cap QX}$, 有 $([x]_P \cap [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$ 。由于 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_P$ 且 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_Q$, 可得 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 且 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$, 有 $x \in \underline{P \wedge QX}$ 。因此有 $\underline{P \cap QX} \subseteq \underline{P \wedge QX}$ 。

c) 由于 $\underline{P \vee QX} \subseteq \underline{P \cap QX}$, 有 $|\underline{P \vee QX}| \leq |\underline{P \cap QX}|$; 同时, 由于 $\underline{P \cap QX} \subseteq \underline{P \wedge QX}$, 有 $|\underline{P \cap QX}| \leq |\underline{P \wedge QX}|$ 。因此 $\alpha_{P \wedge Q} \leq \alpha_{P \cap Q}$ 成立。

证毕。

定理8 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} \underline{P \vee QX} &\subseteq \underline{P \cap QX} \\ \underline{P \cap QX} &\subseteq \underline{P \vee QX} \\ \alpha_{P \vee Q} &\leq \alpha_{P \cap Q} \end{aligned}$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \vee QX}$, 有 $[x]_P \subseteq X$ 或 $[x]_Q \subseteq X$ 成立。由于 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_P$ 且 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_Q$, 有 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq X$ 成立, 则有 $x \in \underline{P \cap QX}$ 成立。因此有 $\underline{P \vee QX} \subseteq \underline{P \cap QX}$ 。

b) $\forall x \in \underline{P \cap QX}$, 有 $([x]_P \cap [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$ 。由于 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_P$ 且 $[x]_P \cap [x]_Q \subseteq [x]_Q$ 。有 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 和 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$ 成立, 则有 $x \in \underline{P \vee QX}$ 。因此有 $\underline{P \cap QX} \subseteq \underline{P \vee QX}$ 。

c) 由于 $\underline{P \vee QX} \subseteq \underline{P \cap QX}$, 有 $|\underline{P \vee QX}| \leq |\underline{P \cap QX}|$; 由于 $\underline{P \cap QX} \subseteq \underline{P \vee QX}$, 有 $|\underline{P \cap QX}| \leq |\underline{P \vee QX}|$ 。因此 $\alpha_{P \vee Q} \leq \alpha_{P \cap Q}$ 。

证毕。

定理9 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} \underline{P \wedge QX} &= \underline{P \cup QX} \\ \underline{P \wedge QX} &\subseteq \underline{P \cup QX} \\ \alpha_{P \cup Q} &\leq \alpha_{P \wedge Q} \end{aligned}$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \cup QX}$, 根据定义可得 $([x]_P \cup [x]_Q) \subseteq X$ 成立, 根据集合之间的关系可得 $[x]_P \subseteq X$ 和 $[x]_Q \subseteq X$ 成立。因此有 $x \in \underline{P \wedge QX}$ 成立, 即 $\underline{P \cup QX} \subseteq \underline{P \wedge QX}$ 。

$\forall x \in \underline{P \wedge QX}$, 有 $([x]_P \subseteq X$ 和 $[x]_Q \subseteq X$ 成立, 因此有 $([x]_P \cup [x]_Q) \subseteq X$, 即 $x \in \underline{P \cup QX}$, 因此 $\underline{P \wedge QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$ 。

综合这两种情况有 $\underline{P \wedge QX} = \underline{P \cup QX}$ 。

b) $\forall x \in \underline{P \wedge QX}$, 有 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 且 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$ 成立。由于 $[x]_P \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, 必然有 $([x]_P \cup [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$, 即 $x \in \underline{P \cup QX}$ 。因此有 $\underline{P \wedge QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$ 成立。

c) 由于 $\underline{P \wedge QX} = \underline{P \cup QX}$, 有 $|\underline{P \wedge QX}| = |\underline{P \cup QX}|$; 由于 $\underline{P \wedge QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$, 有 $|\underline{P \wedge QX}| \leq |\underline{P \cup QX}|$ 。因此可得 $\alpha_{P \cup Q} \leq \alpha_{P \wedge Q}$ 。

证毕。

定理10 给定信息系统 (U, A) , $P, Q \subseteq A, X \subseteq U$, 则有

$$\begin{aligned} \underline{P \cup QX} &\subseteq \underline{P \vee QX} \\ \underline{P \vee QX} &\subseteq \underline{P \cup QX} \\ \alpha_{P \vee Q} &\leq \alpha_{P \cup Q} \end{aligned}$$

证明

a) $\forall x \in \underline{P \cup QX}$, 有 $[x]_P \cup [x]_Q \subseteq X$ 成立; 由于 $[x]_P \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, 可得 $[x]_P \subseteq X$, 即 $x \in \underline{P \vee QX}$ 。因此有 $\underline{P \cup QX} \subseteq \underline{P \vee QX}$ 。

b) $\forall x \in \underline{P \vee QX}$, 有 $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ 或 $[x]_Q \cap X \neq \emptyset$ 成立。由于 $[x]_P \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, $[x]_Q \subseteq [x]_P \cup [x]_Q$, 上述两种情况中的任何一种均可推导出 $([x]_P \cup [x]_Q) \cap X \neq \emptyset$ 。因此有 $\underline{P \vee QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$ 。

c) 由于 $\underline{P \cup QX} \subseteq \underline{P \vee QX}$, 有 $|\underline{P \cup QX}| \leq |\underline{P \vee QX}|$; 由于 $\underline{P \vee QX} \subseteq \underline{P \cup QX}$, 有 $|\underline{P \vee QX}| \leq |\underline{P \cup QX}|$ 。因此可得 $\alpha_{P \vee Q} \leq \alpha_{P \cup Q}$ 。

证毕。

通过上述各定理可以得到组合粒下的粗糙集模型与粒逻辑运算下的粗糙集模型之间的关系, 并且发现在相关粒下的知识粗糙度具有如下关系:

$$\alpha_{P \vee Q} \leq \alpha_{P \cup Q} \leq \alpha_{P \wedge Q} \leq \alpha_{P \cap Q} \quad (\text{下转第2410页})$$

- on rough set (RSNN) for prediction of solitary pulmonary nodules [C]//Proc of International Joint Conference on Bioinformatics, Systems Biology and Intelligent Computing, Washington DC: IEEE Computer Society, 2009: 135-138.
- [52] SIMON H. 神经网络原理[M]. 叶世伟, 史忠植, 译. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [53] JELONEK J, KRAWIEC K, SLOWINSKI R. Rough set reduction of attributes and their domains for neural networks [J]. *Computational Intelligence*, 1995, 11(2): 339-347.
- [54] LINGRAS P J. Rough neural networks [C]//Proc of the 6th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, 1996: 1445-1450.
- [55] 张东波, 王耀南, 易灵芝. 粗集神经网络及其在智能信息处理领域的应用[J]. 控制与决策, 2005, 20(2): 121-126.
- [56] 李敏强, 寇纪淞, 林丹, 等. 遗传算法的基本理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [57] 王文辉, 周东华. 基于遗传算法的一种粗糙集知识约简算法[J]. 系统仿真学报, 2001, 13(Z1): 91-93.
- [58] 赵敏, 罗可, 廖喜讯. 基于免疫遗传算法的粗糙集属性约简算法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(23): 171-173.
- [59] 王萍, 王学峰, 吴谷丰. 基于遗传算法的粗糙集属性约简算法[J]. 计算机应用与软件, 2008, 27(5): 42-44.
- [60] 胡U, 张亦军, 杨冬梅. 粗糙集结合遗传算法在数据挖掘中的应用[J]. 计算机应用, 2006, 26(1): 98-99.
- [61] 代建华, 李元香. 粗集中属性约简的一种启发式遗传算法[J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(12): 1286-1290.
- [62] 代建华, 李元香, 刘群. 粗糙集理论中基于遗传算法的离散化方法[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(8): 13-14.
- [63] 苗夺谦, 王国胤, 刘清, 等. 粒计算: 过去、现在与展望[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [64] ZUPANA B, BOHANEK M, DEMAR J, *et al.* Learning by discovering concept hierarchies [J]. *Artificial Intelligence*, 1999, 109(1): 211-242.
- [65] DEKEL U, GIL Y. Revealing class structure with concept lattices [C]//Proc of the 10th Working Conference on Reverse Engineering, Washington DC: IEEE Computer Society, 2003: 353.
- [66] GANTER B, WHILE R. Formal concept analysis: mathematical foundations [M]. Berlin: Springer, 1999.
- [67] 魏玲, 祁建军, 张文修. 概念格与粗糙集的关系研究[J]. 计算机科学, 2006(3): 18-21.
- [68] ZHANG Wen-xiu, WEI Ling, QI Jian-jun. Attribute reduction in concept lattice based on discernibility matrix [C]//Proc of the 10th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing, Berlin: Springer, 2005: 157-165.
- [69] YAO Yi-yu. Concept lattices in rough set theory [C]//Proc of Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society, 2004: 796-801.
- [70] YAO Yi-yu. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis [C]//Proc of the 4th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, Berlin: Springer, 2004: 59-68.
- [71] 曲开社, 翟岩慧. 偏序集、包含度与形式概念分析[J]. 计算机学报, 2006, 29(2): 219-226.
- [72] 曲开社, 翟岩慧, 梁吉业, 等. 形式概念分析对粗糙集理论表示及扩展[J]. 软件学报, 2007, 18(9): 2174-2182.
- [73] 梁吉业. 基于粗糙集与概念格的智能数据分析方法研究[D]. 北京: 中国科学院计算技术研究所, 2004.
- [74] SHAFER G. A mathematical theory of evidence [M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [75] 单渊达, 倪明. 证据理论及其应用[J]. 电力系统自动化, 1996(3): 76-80.
- [76] SKOWRON A. The relationship between the rough set theory and evidence theory [J]. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, 1989, 37(1): 87-90.
- [77] FAGIN R, HALPERN J Y. Uncertainty, belief, and probability [J]. *Computational Intelligence*, 1991(7): 160-173.
- [78] WU Wei-zhi, LEUNG Y, ZHANG Wen-xiu. Connections between rough set theory and Dempster-Shafer theory of evidence [J]. *International Journal of General Systems*, 2002, 31(4): 405-430.
- [79] WANG Fei-yue. On the abstraction of conventional dynamic systems: from numerical analysis to linguistic analysis [J]. *Information Sciences*, 2005, 171(1-3): 233-259.

(上接第2403页)基于此,从另一个角度给出知识粗细的形式化定义。

定义9 给定信息系统 (U, A) , P, Q 是两个信息粒构造的商空间,称 $P < Q$,如果对任意集合 $X \subseteq U$,均有 $\alpha_Q \leq \alpha_P$ 成立。

实际上,如果 $P < Q$,则由粒集合 P 提供的知识比由 Q 提供的知识更细。基于上述相关定理,可以得到下面的结论。

定理11 $\langle \{P \vee Q, P \cup Q, P \wedge Q, P \cap Q\}, < \rangle$ 是一个链。证明略。

5 结束语

本文讨论了单粒运算与多粒运算下粗糙集之间的关系以及不同的多粒运算下粗糙集之间的关系这两个问题,对于进一步研究动态粒的结构以及基于动态粒的知识获取奠定了良好的基础。

参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy logic = computing with words [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1996, 4(1): 103-111.
- [2] 梁吉业, 钱宇华. 信息系统中的信息粒与熵理论[J]. 中国科学 E 辑, 2008, 38(12): 2048-2065.
- [3] PAWLAK Z. Rough sets [J]. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 1982, 11(5): 341-356.
- [4] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [5] QIAN Yu-hua, LIANG Ji-ye. Rough set method based on multi-granulations [C]//Proc of the 5th IEEE Conference on Cognitive Informatics, New York: IEEE Press, 2006: 297-304.
- [6] QIAN Yu-hua, LIANG Ji-ye, DANG Chang-yin. MGRS in incomplete information systems [C]//Proc of IEEE International Conference on Granular Computing, New York: IEEE Press, 2007: 163-168.
- [7] QIAN Yu-hua, LIANG Ji-ye, YAO Yi-yu, *et al.* MGRS: a multi-granulation rough set [J]. *Information Sciences*, 2009, 180(6): 949-970.
- [8] YAO Yi-yu. Stratified rough sets and granular computing [C]//Proc of the 18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, New York: IEEE Press, 1999: 800-804.
- [9] 傅彦, 顾小丰, 刘启和, 等. 离散数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.