

两个多色顶点 Folkman 数的界*

邵泽辉¹, 许晓东², 罗海鹏²

(1. 华中科技大学 控制科学与工程系, 武汉 430074; 2. 广西科学院, 南宁 530007)

摘要: 对于正整数 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 以及无向简单图 G , 当且仅当对 G 的任意一种顶点 r 着色, 都对某个 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 存在顶点都着有颜色 i 的 a_i 阶的完全子图, 则记 $G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v$ 。对于 $k > \max\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, 顶点 Folkman 数定义为 $F_v(a_1, a_2, \dots, a_r; k) = \min\{|V(G)| : G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v, K_k \not\subseteq G\}$ 。借助于计算机得到了 $18 \leq F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq F_v(2, 3, 3; 4) \leq 30$ 。

关键词: 顶点 Folkman 数; 顶点着色; 上界; 下界

中图分类号: TP301

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2009)03-0834-02

Bounds for two multicolor vertex Folkman numbers

SHAO Ze-hui¹, XU Xiao-dong², LUO Hai-peng²

(1. Dept. of Control Science & Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning 530007, China)

Abstract: For integers $a_1, a_2, \dots, a_r$ and an undirected simple graph G , the symbol $G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v$ means that in every r -coloring of $V(G)$, there exists a monochromatic a_i -clique of color i for some $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. The vertex Folkman number is defined as $F_v(a_1, a_2, \dots, a_r; k) = \min\{|V(G)| : G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v, K_k \not\subseteq G\}$. With the help of computer search, this paper obtained $18 \leq F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq F_v(2, 3, 3; 4) \leq 30$.

Key words: vertex Folkman number; vertex coloring; upper bound; lower bound

0 引言

$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, $\text{Aut}(G)$ 表示 G 的自同构群。若 $\text{Aut}(G)$ 在 $V(G)$ 上是可迁的, 即对任意 $u, v \in V(G)$, 总存在 $\sigma \in \text{Aut}(G)$ 使得 $\sigma(u) = v$, 则称图 G 是点可迁图。

对于正整数 m, n , Ramsey 数 $R(m, n)$ 是指最小正整数 n , 使得每一个 n 阶的图 G , 或者 G 包含 K_m , 或者 G 的补图包含 K_n 。如果某个图 G 不含 K_m 且 G 的补图不含 K_n , 则称 G 为 (m, n) -图。对于正整数 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 以及无向简单图 G , 当且仅当对 G 的任意一种顶点 r 着色, 都对某个 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 存在顶点都着有颜色 i 的 a_i 阶的完全子图, 记做 $G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v$ 。对于 $k > \max\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, 顶点 Folkman 数定义为

$$F_v(a_1, a_2, \dots, a_r) = \min\{|V(G)| : G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v, K_k \not\subseteq G\}$$

1970 年, Folkman^[1] 证明对于任意正整数 a_1, a_2 以及 $k > \max\{a_1, a_2\}$, 都存在一个图 G , 使得 $G \rightarrow (a_1, a_2)^v, K_k \not\subseteq G$ 。Folkman 研究的是 2 色的情形, 文献[2]将 2 色推广到多色的情形。借助于计算机, Piwakowski 等人^[3]得到了 $F_v(3, 3; 4) = 14$; 2000 年, Nenov^[4] 证明了 $10 \leq F_v(2, 2, 3; 4) \leq 14$; 2006 年, Coles 等人^[5]通过计算机计算得到了 $F_v(2, 2, 3; 4) = 14$ 。

为了研究 $F_v(2, 2, 2, 3; 4)$ 和 $F_v(2, 3, 3; 4)$ 的界, 本文设计算法用于验证: 对于正整数 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 以及无向简单图 G , 图 G 是否具有性质

$$G \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_r)^v \quad (1)$$

为了方便, 称式(1)为图 G 的 Folkman 性质。如果 G 不满足性质(1), 则称 G 有 $(a_1, a_2, \dots, a_r)^v$ 染色。

1 测试图的 Folkman 性质

为了研究顶点 Folkman 数的上界, 需要解决以下问题: 对于正整数 $a_1, a_2, \dots, a_r$, 以及无向简单图 G , 图 G 是否具有性质(1)。

对于 3 色的情形, 本文给出基本算法如下(其中 find 设置为引用参数):

```
IsGColorable( $G$ , curlayer,  $a_1, a_2, a_3$ , find)
{
1  if find = true then
2      return;
3  if curlayer =  $G$  的顶点数 + 1 then
4      {
5          if  $G$  的 1 色顶点导出子图含  $a_1$  阶的团 then
6              return;
7          if  $G$  的 2 色顶点导出子图含  $a_2$  阶的团 then
8              return;
9          if  $G$  的 3 色顶点导出子图含  $a_3$  阶的团 then
10             return;
11         find true;
12         return;
13     }
13 对  $G$  的第 curlayer 个顶点着第 1 色;
14 IsGColorable( $G$ , curlayer + 1,  $a_1, a_2, a_3$ , find);
```

收稿日期: 2008-05-16; 修回日期: 2008-07-23 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60563008); 广西科学院基本科研业务费资助项目(080414)

作者简介: 邵泽辉(1978-), 男, 湖北黄冈人, 博士研究生, 主要研究方向为图论、智能计算; 许晓东(1974-), 男, 黑龙江泰来人, 副研究员, 主要研究方向为图论; 罗海鹏(1947-), 男, 广东东莞人, 研究员, 主要研究方向为组合数学与算法研究(haipengluo@163.com)。

```
15 对  $G$  的第  $\text{layer}$  个顶点着第 2 色;  
16 IsGColorable( $G, \text{curlayer} + 1, a_1, a_2, a_3, \text{find}$ );  
17 对  $G$  的第  $\text{layer}$  个顶点着第 3 色;  
18 IsGColorable( $G, \text{curlayer} + 1, a_1, a_2, a_3, \text{find}$ );  
}
```

引理 1 给定一个图 G , 设置变量 $\text{find} = \text{false}$, 然后调用函数 IsGColorable($G, 1, 2, 3, \text{find}$)。当 find 返回 true, 则图 G 不具有性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$; 否则 G 具有性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$ 。

证明 IsGColorable 是一个递归算法, 在算法 IsGColorable 中, $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 3$, 当程序到达第 11、12 行时, 给出了一种对图 G 的所有顶点的 3 着色。其中颜色集为 $\{1, 2, 3\}$, 且不含 1 色 2 阶的团, 不含 2 色 3 阶的团, 不含 3 色 3 阶的团。之后, find 变量的值为 true, 由第 1、2 行知, 当 find 为 true 时, 程序退出递归从而返回, 所以, 当 find 返回 true, 则图 G 不具有性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$ 。当程序始终没有到达 11、12 行时, 则在第 6 行, 或第 8 行, 或第 10 行退出, 此时, 对图 G , 无论怎样着色, 要么出现了 1 色的 2 团, 要么出现了 2 色或 3 色的 3 团, 而程序结束时, find 仍为 false。当 find 返回 false, 则图 G 具有性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$ 。

2 $F_v(2, 3, 3; 4)$ 和 $F_v(2, 2, 2, 3; 4)$ 的界

首先讨论 $F_v(2, 3, 3; 4)$ 和 $F_v(2, 2, 2, 3; 4)$ 的下界。

引理 2 $F_v(2, 2, 2, 3; 4) \geq 17$, 且如果等于 17, 17 阶的 Folkman 图只能是不含 4 独立集的 $(4, 4)$ -图。

证明 由于任意一个不含 4 团的 16 阶图 H 一定含有 3 独立集, 并且 $F_v(2, 2, 3; 4) = 14$, 所以 H 中除此 3 独立集之外的其他 13 个顶点导出的子图有 $(2, 2, 3)^v$ 染色, 这时 H 有 $(2, 2, 3)^v$ 染色。所以 $F_v(2, 2, 2, 3; 4) \geq 17$ 。

设一个 17 阶图 G 满足 $G \rightarrow (2, 2, 2, 3)^v$, 且不含 4 团。如果 G 含有 4 独立集, 则类似于上述讨论, 由 $F_v(2, 2, 3; 4) = 14$ (见文献[5]) 可知, 其他 13 个顶点导出的子图有 $(2, 2, 3)^v$ 染色, 这时 G 有 $(2, 2, 2, 3)^v$ 染色。因此 G 不含 4 独立集, 此时它是一个 $(4, 4)$ 图。

定理 1 $F_v(2, 2, 2, 3; 4) \geq 18$ 。

证明 假设存在一个 17 阶图 G 满足 $G \rightarrow (2, 2, 2, 3)^v$, 且不含 4 团, 则由引理 2, G 是一个 17 阶的 $(4, 4)$ -图, 而 17 阶的 $(4, 4)$ -图是惟一的, 且已经由文献[6] 给出。对处理 3 色情形的算法 IsGColorable 作很小的修改, 容易得到处理 4 色情形的相应算法, 利用此算法经过计算, 图 G 不满足性质 $G \rightarrow (2, 2, 2, 3)^v$ 。所以 $F_v(2, 2, 2, 3; 4) \geq 18$ 。

$F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq F_v(2, 3, 3; 4)$, 由定理 1 可知:

推论 1 $F_v(2, 3, 3; 4) \geq 18$ 。

下面讨论 $F_v(2, 3, 3; 4)$ 的上界。

利用算法 IsGColorable 对一个 34 个顶点的 $(4, 6)$ 图 G (见文献[7] 中的第一个图) 测试, 结果表明: G 满足性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$ 。由此可知 $F_v(2, 3, 3; 4) \leq 34$ 。但此图的任何一个导出子图都不满足性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$ 。此后本文又找到了一个 30 阶的不含 4 团的图 G 满足性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$, 从而得到下述定理。

定理 2 $F_v(2, 3, 3; 4) \leq 30$

证明 利用算法 IsGColorable, 本文对一个不含 4 团的 30 阶点可迁图 (见文献[8] 文件 Cay30. g6 中的第 10 296 个图) 测试, 结果表明: G 满足性质 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$, 于是 $F_v(2, 3, 3; 4) \leq 30$ 。

对删掉 G 的一个顶点得到的 29 阶子图加足够多的边而不含 K_4 的图, 利用算法 IsGColorabl 可得, 这个 29 阶的图不能给出 $F_v(2, 3, 3; 4)$ 的上界。

利用颜色的对称性可以减少重复搜索。在关于上述的 34 和 30 阶图的计算中, 判断图 G 是否满足 $G \rightarrow (2, 3, 3)^v$ 时, 由于对第一个点着 2 色和 3 色是等价的, 只需对第一个点着颜色 1 或颜色 2。如果图中第一个顶点和第二个顶点相邻, 则只需要考虑以下两种情况: a) 第一个顶点染颜色 1, 第二个顶点染颜色 2; b) 第一个顶点染颜色 2。这样计算效率可提高一倍。由于上述的 30 阶图是点可迁的, 并且第一个顶点和第二个顶点相邻, 还可以进一步减小计算量, 只需处理其中的第一种情况即第一个顶点染颜色 1, 第二个顶点染颜色 2。

由定理 2 及 $F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq F_v(2, 3, 3; 4)$ 可得

推论 2 $F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq 30$ 。

3 结束语

对于 n 个顶点的图 G , 算法 IsGColorable 的时间复杂度为 $O(3^n)$ 。虽然在具体的计算中复杂度会略小一些, 但对于阶数较大的图, 用算法 IsGColorable 测试性质 (1) 可能难以在可接受的时间内遍历所有的情况。为了提高算法的效率, 除了上一章提到的方法外, 还可以采用以下策略:

a) 在 IsGColorable 中, 第 2 行后面、第 3 行前面加一些控制剪枝的条件: 当 layer 到达某个给定的数, 即到达给定的层数时, 判断 G 的前 layer 个顶点中 i 色顶点导出子图含 a_i 阶的团, 若含有则返回。

b) 如果要测试的图不是正则图, 可对测试的图 G 按顶点的度递减排序。对前面的第一个 34 阶的图的顶点进行度的递减排序, 这时得到的图中第一个顶点和第二个顶点相邻。这种方法结合上文关于对称性的分析, 计算效率也能得到较大的提高。

参考文献:

[1] FOLKMAN J. Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1970, 18(1): 19-24.

[2] NESETRIL J, RODL V. The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs [J]. Journal of Combinatorial Theory, Serial B, 1976, 20: 243-249.

[3] PIWAKOWSKI K, RADZISZOWSKI S P, URBRANSKI S. Computation of the Folkman number $Fe(3, 3; 5)$ [J]. Journal of Graph Theory, 1999, 32(1): 41-49.

[4] NENOV N D. On a class of vertex Folkman graphs [J]. Annuaire Univ Sofia Fac Math Inform, 2000, 94: 15-25.

[5] COLES J, RADZISZOWSKI S P. Computing the Folkman number [J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2006, 58: 13-22.

[6] GREENWOOD R E, GLEASON A M. Combinatorial relations and chromatic graphs [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7(1): 1-7.

[7] McKAY B. The largest known Ramsey $(4, 6)$ -graphs [EB/OL]. [2008-02-12]. <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html>.

[8] ROYLE G. Transitive graphs [EB/OL]. (1997-01-16). <http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/remote/trans/index.html>.