用于多维函数优化的实数编码量子蚁群算法 *

黄景文[a]，覃朝勇[b]
（广西大学 a. 信息网络中心；b. 数学与信息科学学院，南宁 530004）

摘 要：基于量子计算理论及蚂蚁群体寻优策略，提出了一种用于连续优化问题的新方法——实数编码量子蚁群算法（RQACOA）。针对量子比特编码和二进制编码在连续优化问题上的不足，引入一种新的实数编码表示方法，设计了智能量子蚂蚁，一条染色体携带指定范围内的多个个体信息。智能量子蚂蚁利用量子态纠缠和相干机理，通过叠加、变异及自学习来完成前期进化过程，然后以蚂蚁群体智能寻优方式进一步求解。实验结果表明，该算法具有强的全局寻优能力及快速搜索能力。

关键词：量子计算；进化算法；实数编码；蚁群算法
中图分类号：TP18；TP301.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1001-3695(2009)10-3660-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2009.10.016

Real-coded quantum ant colony optimization algorithm for global numerical optimization

HUANG Jing-wen[a], QIN Chao-yong[b]
(*a. Information Network Center, b. School of Mathematics & Information Science, Guangxi University, Nanning* 530004, *China*)

Abstract: This paper proposed a novel kind of algorithm, real-coded quantum ant colony optimization algorithm (RQACOA), for global numerical optimization based on ant colony optimization and quantum computation. It advanced a new real-coded method and designed intelligent quantum ants, took a chromosome several individuals information, and adopted quantum computation mechanics, proposed interference operator, proposed mutation operator and self-learning operator to accelerate evolution process. After that, employed ant colony to further optimization. The result of simulation experiments shows that RQACOA has a strong ability of global optimization and high convergence speed.

Key words: quantum computation; evolutionary algorithm; real-coded; ant colony optimization algorithm

0 引言

Holland 的复杂自适应系统理论认为，诸如人的大脑、免疫系统、生命系统、细胞、蚁群以及人类社会中的政党等都是由相互作用的智能体组成的网络。生物群体中的每个个体都具有一定的智能行为能力，多个智能体组成的系统通过相互作用和合作，可以协同地完成一个任务或求解问题。蚂蚁算法（ant algorithm，AA）是由意大利学者 Dorigo 等人[1,2]提出的一种随机优化方法，它是一种源于大自然的仿生类算法，主要是通过蚂蚁群体之间的信息传递来达到寻优的目的；它是在对蚂蚁种群行为模拟的基础上融进了人类智能的一种分布式全局优化方法。蚂蚁算法已经成功应用于 TSP、分配及调度等问题，并取得了较好的结果。研究结果已经表明了蚁群优化算法具有较好的寻优能力、分布式计算、鲁棒性强等优点，但同时也有如下不足：初期信息素匮乏、需要较长的搜索时间、求解速度慢、规模较大时易陷入局部最优解[3]。学者们寻求各种改进策略以提高蚂蚁算法的求解效率，包括 MMAS（max-min ant system）[3]和 ASrank（rank-based version of ant system）[4]等。

基于量子力学原理发展而来的量子计算在近十几年的时间里取得了极大的发展。它利用量子叠加性、纠缠性和量子相干性的特点来实现并行计算，从本质上改变了传统的计算理念。结合了传统智能计算和量子计算理论的量子智能计算近几年引起众多研究者的兴趣，并取得了不少研究成果。Narayanan 等人[5]首先将遗传算法与量子理论相结合，提出了量子遗传算法（quantum genetic algorithm，QGA）。文献[6,7]分别提出了遗传量子算法和并行量子遗传算法。文献[8,9]将量子理论与进化理论相结合，分别提出了用于组合优化的量子进化算法（quantum evolutionary algorithm，QEA）和用于函数优化的量子进化规划（quantum evolutionary programming，QEP）。该领域最近的一些研究成果见文献[10,11]。基于量子比特表示染色体的量子进化计算，在旋转角查找及量子位编码过程中消耗更多的计算资源，并使得解的精度受到编码位的影响，以量子比特为基础的量子进化算法更适合于解决组合优化问题。为将量子进化算法应用于连续空间优化问题，国内外学者陆续提出了一些改进的量子算法[12~15]。

蚁群算法中，每个蚂蚁只了解本地信息，并不掌握全局信息，在搜寻的初始阶段，每个蚂蚁的转移概率都是随机的，由此带来的蚁群算法在初始阶段寻优效果较差。量子进化算法具有快速随机搜索能力，但对于系统中的反馈信息却利用不充分。在前期工作基础上[15]，本文将量子进化算法与蚂蚁算法相结合，提出基于实数编码的量子蚁群算法（quantum ant colony optimization algorithm base on real-coded，RQACOA）。算法第

收稿日期：2009-02-01；**修回日期**：2009-03-24 **基金项目**：国家社科基金资助项目（08XTQ011）；广西大学科研基金资助项目（X081094）
作者简介：黄景文（1973-），男（壮族），广西来宾人，高级工程师，博士，主要研究方向为智能决策分析、信息管理等（kingwen@gxu.edu.cn）；覃朝勇（1975-），男（壮族），广西东兰人，讲师，博士研究生，主要研究方向为智能决策分析、量子计算等.

一阶段通过量子进化生成初始信息素分布；第二阶段利用蚁群算法求精确解。最后通过数值实验验证了 RQACOA 在多维函数优化问题中具有良好的性能。

1　实数编码量子蚁群算法

函数优化问题的一般数学模型为

$$\min f(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$$

其中：$f(x)$ 为目标函数；$S \subseteq R^m$ 表示边界为 $\underline{x_i} \leqslant x_i \leqslant \overline{x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的 m 维搜索空间。函数优化问题是一类典型的连续优化问题。

1.1　实数编码量子进化算法

文献[15]提出了一种基于实数编码的量子进化算法(RQEA)，以矩形区域表示基因。该矩形区域由中心位置和半径惟一确定，并以个体相对势能大小作为矩形区域的高度。一个量子染色体 q 表示一个智能量子蚂蚁，该染色体包含了以 c 为中心点、半径为 r 的范围内的所有可能解。具体表示如下：

$$q_i = [v_1, v_2, \cdots, v_m] = [(c_1, r_2), (c_2, r_2), \cdots, (c_m, r_m)]$$
$$i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

其中：m 为染色体长度；n 为智能量子蚂蚁规模；c_j 表示第 j 个基因矩形区域的中心值；r_j 为第 j 个基因矩形区域的半径。h_i 表示基因矩形的高度，表示个体 q_i 的适应度在同一种群所有个体适应度中的相对值。

$$h_i = E(q_i) / \sum_{k=1}^{m} E(q_k) \tag{2}$$

其中：$E(q_i) = M - f(q_i)$。

RQEA 中，单个个体以概率形式存在于矩形区域中，对应于观测量子态时发生坍塌得到二进制编码，可在该区域内观测或测量出具体的某个单点值。矩形 v_j 的高度为个体的相对势能 h_i。在同一个量子种群中，所有个体的高度之和为 1。以这种方式表达的染色体，一个染色体携带了多个个体的信息。RQEA 通过模拟量子态叠加及变异来完成进化学习过程，具体可参阅文献[15]。

1.2　蚂蚁自学习

自然界中的生物个体，除了具有自适应等能力外，还具有从局部环境进行自学习的能力。对于函数优化问题，将局部搜索方法与进化算法相结合能够更好地求解问题。在 RQACOA 中，利用自学习算子来实现局部搜索，该算子类似于一个小规模的 RQACOA。假设进化到第 t 代时最优个体为 $q^t_{\max}$，将自学习算子作用于 $q^t_{\max}$ 上，即通过小规模的 RQACOA 在个体 $q^t_{\max}$ 的邻域内进行搜索，若找到比 $q^t_{\max}$ 适应度更好的个体，则用来替代当前最优解。自学习过程的具体步骤描述如下：

a) 初始化，将 $q^t_{\max}$ 中个体变量下限映射为 0 态，上限映射为 1 态，并产生初始量子种群 $E(t)$，$t \leftarrow 0$。

b) 由 $F(t)$ 产生传统经典种群 $G(t)$。

c) 计算 $G(t)$ 中每个个体的适应度。

d) 进行叠加，从叠加后相对势能高的区域中产生若干新个体取代 $F(t)$ 中势能较低的相同数量个体，得到 $F(t)'$。

e) 对 $F(t)'$ 执行变异算子，更新得到 $F(t)''$。

f) 测量 $F(t)''$，产生传统经典种群 $G'(t)$。

g) 计算求出 $G'(t)$ 中的最优个体 $\max(G'(t))$；if $E(q^t_{\max}) < E(\max(G'(T)))$，$q^t_{\max} \leftarrow \max(G'(t))$。

1.3　量子蚁群概率选择和信息素更新

本文以式(1)表示染色体带来的另一个优点是易于处理连续空间优化问题。在离散空间优化问题中，问题的候选解是以离散点状态方式存在，而在连续优化问题中，候选解空间是连续的区域，在解的表达和寻优方式上有区别。蚁群算法在解决离散空间和连续空间优化问题时，在信息素存留方式及寻优策略等方面都会有较大的不同。

智能量子蚂蚁经过叠加、变异和自学习的进化操作后，获得一定的知识并积累，将学习得来的信息作为第二阶段量子蚂蚁寻优的初始信息素。优化函数的维度为 m，量子蚂蚁数规模为 n，则每个蚂蚁需要经过 m 个节点才能走完一条完整的路径。第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个蚂蚁 $q_i = [(c_1, r_2), (c_2, r_2), \cdots, (c_m, r_m)]$ 的转移概率为

$$p_{ij} = (\tau_i^{\alpha} \times \eta_{ij}^{\beta}) / (\sum_k \tau_k^{\alpha} \times \eta_{ik}^{\beta}) \tag{3}$$

其中：τ_i 为蚂蚁 i 在其感知半径 r_i 范围内的蚂蚁数量；启发信息因子 $\eta_{ij} = h_i - h_j$，即相对势能差；α 是蚂蚁信息素的相对重要性；β 是启发信息的相对重要性。在计算转移概率时，蚂蚁感知半径范围内的信息被充分考虑，而不是一个单独的离散点。信息强度更新方程为

$$\tau_{i+1} = \rho\tau_i + \Delta\tau_j \tag{4}$$

其中：$\rho(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$ 是信息素持久度；$\Delta\tau_i$ 为蚂蚁 j 在本次循环中半径范围内遗留的信息素。

1.4　实数编码量子蚁群算法描述

算法 RQACOA 描述如下：

a) 产生初始量子蚂蚁种群 $Q(t)$，$t \leftarrow 0$；

b) 由 $Q(t)$ 产生传统经典种群 $P(t)$；

c) 计算 $P(t)$ 中每个个体的适应度，计算个体相对势能；

d) 对种群进行叠加；

e) 从叠加后相对势能高的区域中生成新个体，按适应度大小从原种群和新个体中选择 n 个蚂蚁组成新种群 $Q(t)'$；

f) 对 $Q(t)'$ 执行变异算子，更新得到 $Q(t)''$；

g) 测量 $Q(t)''$，取 $Q(t)'$ 和 $Q(t)''$ 中适应度最优的一半替换得种群 $Q(t)$；

h) 对当代最优个体执行自学习算子；

i) 满足停止准则转 j)，否则 $t \leftarrow t + 1$，转 b)；

j) 初始化参数 α、β 及 ρ；

k) 计算每个量子蚂蚁感知范围内的蚂蚁数及信息素 τ，并计算每个量子蚂蚁的转移概率；

l) 根据转移概率进行寻优，每个量子蚂蚁都遍历完一条完整的路径；

m) 评价寻优结果，保存最优路径；

n) 满足停止准则则结束，否则更新信息素并转 k)。

步骤 b) 中经典种群的产生就是在个体表示的矩形区域内观测出某个单点值，可以矩形中点表示，也可以其他方式在矩形区域内产生某个点。

2　数值实验

RQACOA 中，种群规模 n 取得过大会影响算法性能，太小则难以收敛。自学习算子中的种群规模一般小于 RQACOA 规模。r 为矩形区域的半径，控制个体搜索范围，取值为 $0 < r < (\overline{x_i} - \underline{x_i})/2n$，$r$ 取太大则不易收敛，太小则在叠加中不易使个体之间产生相干，一般 $r = (0.1 \sim 0.8) \times (\overline{x_i} - \underline{x_i})/2n$。为了提高自学习效率和效果，自学习中的矩形区域半径 $sr = 0.01 \sim 0.1 \times r$。这是因为自学习主要针对目前最优个体周围进行搜

索,所以步长比较小。变异概率 p 一般取 0.1 ~ 0.3;σ 控制变异的程度,即控制量子染色体表示的矩形区域在变异向旁边移动的程度,一般取 0.1 ~ 0.3。pt 控制变异策略,若 $pt > 0.5$,变异着重于开采,即利用已有信息;若 $pt < 0.5$,着重于勘探,即探索新的空间。信息持久度 $0 < \rho < 1$,取值太大则算法的随机搜索性能不好,太小则影响算法的收敛速度。参数 β 表示启发信息重要程度,为了使算法寻优过程能充分利用问题本身的信息,β 不应取太小。测试中,各参数具体设置如下:$n = 10$,$sn = 5$,$r = 0.3 \times (\bar{x} - \underline{x})/2n$,$sr = 0.01 \times r$,$p = 0.2$,$pt = 0.3$,$\alpha = 1$,$\beta = 3$,$\rho = 0.9$。

为了测试算法的性能,本文将 RQACOA 与粒子群优化算法(particle swarm optimization, PSO)[16]、随机遗传算法(stochastic genetic algorithms, StGA)[17]进行了比较。

以上两个算法在函数优化中有着非常优异的性能。本文采用如下的四个标准函数进行实验:

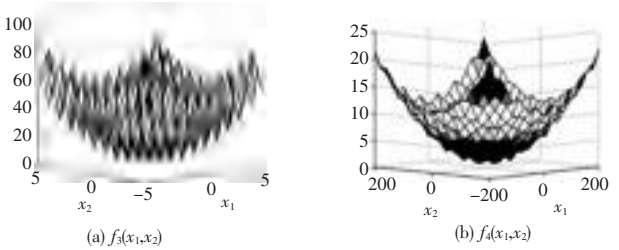
$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, S = [-100, 100]^n, f_{\min} = 0$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} [100(x_i - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2], S = [-30, 30]^n, f_{\min} = 0$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10], S = [-5.12, 5.12]^n, f_{\min} = 0$$

$$f_4(x) = (1/4000)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \prod_{i=1}^{n} \cos(x_i/\sqrt{i}) + 1, S = [-600, 600]^n, f_{\min} = 0$$

f_1 和 f_2 是单峰函数,相对容易优化,但是随着优化维度的提高,优化会变得越来越困难。f_3 和 f_4 是多峰函数,其局部极值的个数随着函数维数增高而增多,被当做许多优化算法中典型的优化难题。图 1 显示了 2 维时 f_3 和 f_4 的函数图像。



(a) $f_3(x_1,x_2)$　　(b) $f_4(x_1,x_2)$

图 1　2 维时多峰值函数 f_3 和 f_4 的图像

为了便于比较,需要设定参数以取得与 StGA 大致相同的函数评价次数,并在此基础上比较不同算法解的情况。对每个函数运行 50 次,表 1 给出了运行结果。

表 1　对 30 维函数优化结果比较

测试函数	平均函数评价次数			平均优化结果(方差)		
	RQACOA	StGA	PSO	RQACOA	StGA	PSO
f_1	31500	30000	250000	6.15×10^{-18} (4.43×10^{-18})	2.45×10^{-15} (5.25×10^{-16})	11.175 (1.3208)
f_2	43900	45000	250000	3.76×10^{-10} (3.18×10^{-8})	0.04435(0)	1911.598 (374.2935)
f_3	30000	28500	250000	4.01×10^{-15} (3.62×10^{-14})	4.42×10^{-13} (1.14×10^{-13})	47.1354 (1.8782)
f_4	11000	8000	250000	4.11×10^{-20} (5.83×10^{-18})	2.44×10^{-17} (4.54×10^{-17})	0.4498 (0.0566)

由表 1 可知,在 30 维函数优化问题上,无论是评价次数还是优化结果的精度,RQACOA 都显著优于 PSO。对于所优化的四个函数,在平均函数评价次数大致相同的情况下,RQACOA 优于 StGA。由此可见,将基于实数编码的进化策略与蚁群群体智能寻优策略融合,能较大地提高函数优化问题的寻优效果。

3　结束语

本文基于量子态叠加和相干原理,设计了一种实数编码表示方法。该编码以矩形区域作为智能量子蚂蚁的感知范围,并替代了传统编码中的单点编码,使得一个量子染色体携带多个个体信息;同时考虑了个体的适应度,将个体的相对势能作为矩形区域的高度,适应度越高,最优解出现在该区域的概率也就越大。本文还设计了叠加算子、变异算子及自学习算子。在此基础上,将量子进化算法与蚁群算法融合,提出了用于多维函数优化的量子蚁群算法 RQACOA。量子进化结果用于蚁群初始信息素设置,克服了蚁群算法初期由于随机搜索而造成的初始信息缺乏的不足。量子进化过程与蚁群算法能很好地衔接。仿真结果表明了 RQACOA 在解决函数优化问题中的有效性。

参考文献:

[1] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colonies for the traveling salesman problem[J]. Biosystems, 1997, 43(2): 73-81.

[2] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 53-66.

[3] THOMAS S, HOLGER H. MAX-MIN ant system[J]. Future Generation Computer System, 2000, 16(8): 889-914.

[4] BULLNHEIMER B, HARTL R F, STRAUSS C. A new rank-based version of the ant system: a computational study[J]. Central European Journal for Operations Research and Economics, 1999, 7(1): 25-38.

[5] NARAYANAN A, MOORE M. Quantum-inspired genetic algorithm [C]//Proc of IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 1996: 61-66.

[6] HAN K H, KIM J H. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problems[C]//Proc of Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 2000: 1354-1360.

[7] HAN K H, PARK K H, LEE C H, *et al*. Parallel quantum-inspired genetic algorithm for combinatorial optimization problems[C]//Proc of Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 2001: 1422-1429.

[8] HAN K H, KIM J H. Quantum-inspired evolutionary algorithm for a class of combinatorial optimization[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(6): 580-593.

[9] YANG Shu-yuan, JIAO Li-cheng. The quantum evolutionary programming[C]//Proc of the 5th ICCIMA. Piscataway: IEEE Press, 2003: 362-367.

[10] LI Ying, ZHANG Yan-ning, ZHAO Rong-chun, *et al*. The immune quantum-inspired evolutionary algorithm[C]//Proc of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Piscataway: IEEE Press, 2004: 3301-3305.

[11] 覃朝勇, 郑建国. 用于高维函数优化的多智能体量子进化算法[J]. 自然科学进展, 2008, 18(2): 197-205.

[12] 陈辉, 张家树, 张超. 实数编码混沌量子遗传算法[J]. 控制与决策, 2005, 20(11): 1300-1303.

[13] 张葛祥, 李娜, 金炜东, 等. 一种新量子遗传算法及其应用[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 476-479.

[14] Da CRUZ A V A, VELLASCO M B B, PACHECO M A C. Quantum-inspired evolutionary algorithm for numerical optimization[C]//Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE Press, 2006: 2630-2637.

[15] QIN Chao-yong, LIU Yong-juan, ZHENG Jiang-guo. A real-coded quantum-inspired evolutionary algorithm for global numerical optimization[C]//Proc of IEEE International COnference on Cybernetics and Intelligent. Piscataway: IEEE Press, 2008: 1160-1164.

[16] ANGELINE P J. Evolutionary optimization versus particle swarm optimization: philosophy and performance differences[C]//Proc of the 7th International Conference on Evolutionary Programmming. London, UK: Springer-Verlag, 1998: 601-610.

[17] TU Zheng-guo, LU Yong. A robust stochastic genetic algorithm (StGA) for global numerical optimization[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2004, 8(5): 456-470.