

## 离散 $H_\infty$ 滤波系统最优范数计算的特征值算法

吴志刚, 钟万勰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

**摘要:** 基于 Riccati 方程解的存在条件, 建立了离散系统  $H_\infty$  滤波问题的最优范数  $\gamma_{opt}$  与相关的 Hamiltonian 差分方程一阶特征值, 以及矩阵广义特征值问题一阶特征值之间的对应关系. 根据这一关系可以用求解特征值问题的算法计算最优  $H_\infty$  范数. 由于仅需计算一阶特征值, 所以可用扩展 Wittrick-Williams 算法求解这一问题.

**关键词:** 离散  $H_\infty$  滤波;  $H_\infty$  范数; Hamiltonian 差分方程; 特征值

**中图分类号:** TP273, TP032      **文献标识码:** A

## Optimal norm computation for discrete $H_\infty$ filtering systems by eigenvalue algorithm

WU Zhi-gang, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Liaoning Dalian 116023, China)

**Abstract:** Based on the existence condition of solutions to Riccati equations, the paper presents the connection among optimal norm  $\gamma_{opt}$  of discrete  $H_\infty$  filtering problem, the first order eigenvalue of an associated Hamiltonian difference equation, and the first order eigenvalue of a generalized matrix eigenvalue problem. The algorithms for the eigenvalue problems is adopted to compute  $\gamma_{opt}$ . The extended Wittrick-Williams algorithm is used to compute the optimal  $H_\infty$  norm because only the first order eigenvalue is needed for  $H_\infty$  filtering.

**Key words:** discrete  $H_\infty$  filtering;  $H_\infty$  norm; Hamiltonian difference equation; eigenvalue

### 1 引言 (Introduction)

卡尔曼滤波器是解决含噪声信号滤波问题的有效方法, 这种滤波器要求信号的产生机理及噪声的统计特性已知, 由于许多情况下只能得到信号的近似模型, 或者无法得到信号的统计特性, 使其应用范围受到一定的限制. 另外, 卡尔曼滤波器用于参数不确定系统时鲁棒性也较差. 近年来,  $H_\infty$  滤波器引起广泛的兴趣, 并已取得许多理论研究成果<sup>[1-3]</sup>.  $H_\infty$  滤波器可以确保从噪声到估计误差间传递函数的  $H_\infty$  范数小于某个给定的正数, 噪声可以是任意的有界信号, 而且  $H_\infty$  滤波器对系统参数的不确定性不太敏感, 鲁棒性较好. 在  $H_\infty$  滤波器的设计中, 最优  $H_\infty$  范数的计算是一个基本环节. 目前已经有许多  $H_\infty$  范数的计算方法, 但这些算法大多是针对无限时间问题的. 文[4,5]研究了连续系统  $H_\infty$  滤波器最优范数的计算及滤波方程的求解问题, 所提出的方法可以计算有限及无限区间滤波问题的最优  $H_\infty$  范

数. 本文在此基础上研究了离散  $H_\infty$  滤波系统的最优范数计算问题, 首先建立了  $\gamma_{opt}$  与相关的 Hamiltonian 差分方程特征值之间的联系, 进而给出了  $\gamma_{opt}$  与广义矩阵特征值之间的对应关系, 然后将计算特征值的扩展 Wittrick-Williams 算法<sup>[6]</sup>用于计算  $\gamma_{opt}$ .

### 2 最优 $H_\infty$ 范数与 Hamiltonian 差分方程特征值 (Optimal $H_\infty$ norm and eigenvalues of Hamiltonian difference equation)

考虑线性离散系统

$$x_{k+1} = A_k x_k + D_k w_k, \quad x_0 = 0, \quad (2.1)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (2.2)$$

$$z_k = H_k x_k. \quad (2.3)$$

其中  $k \in [0, N-1]$ , 状态  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , 量测  $y_k \in \mathbb{R}^q$ , 过程噪声  $w_k \in \mathbb{R}^l$ , 量测噪声  $v_k \in \mathbb{R}^q$ , 状态向量的线性组合  $z_k \in \mathbb{R}^p$  是需要估计的向量. 要求对于给定的正数  $\gamma$ , 所设计的滤波器满足

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - \hat{z}_k)^T (z_k - \hat{z}_k) < \frac{1}{2} \gamma^2 \left[ \sum_{k=0}^{N-1} (w_k^T w_k + v_k^T v_k) + (x_0 - \hat{x}_0)^T Q_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) \right]. \quad (2.4)$$

式中,  $z_k$  是状态滤波  $\hat{x}_k$  的线性组合,  $z_k = H_k \hat{x}_k$ ;  $\hat{x}_0$  是对初始状态的估计;  $Q_0^{-1} > 0$ . 定义最优  $H_\infty$  滤波的性能指标为<sup>[3]</sup>

$$\gamma_{\text{opt}} := \inf_{z_k} \frac{\|z_k - \hat{z}_k\|_2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_2 + \|w_k\|_2 + \|v_k\|_2}. \quad (2.5)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示信号的 2-范数. 对预先给定的噪声抑制指标  $\gamma > 0$ , 当且仅当下列离散 Riccati 方程存在稳定对称解  $\Sigma_k > 0$  时, 存在满足条件的次优  $H_\infty$  滤波器.

$$\begin{cases} \Sigma_{k+1} = A_k (\Sigma_k^{-1} + C_k^T C_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k)^{-1} A_k^T + D_k D_k^T, \\ \Sigma_0 = Q_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

而相应的中心  $H_\infty$  滤波器形式为

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + K_k (y_k - C_k \hat{x}_k). \quad (2.7)$$

其中  $K_k$  是滤波增益

$$K_k = A_k \Sigma_k (I - \gamma^{-2} H_k^T H_k + C_k^T C_k)^{-1} C_k^T. \quad (2.8)$$

当  $\gamma$  趋近于  $\gamma_{\text{opt}}$  时, Riccati 方程解矩阵的一个特征值将趋近无穷大, 当  $\gamma = \gamma_{\text{opt}}$  时次优  $H_\infty$  滤波器不存在<sup>[2]</sup>.

按照研究  $H_\infty$  优化问题的微分对策方法<sup>[3]</sup>, 定义如下形式的目标函数

$$\begin{aligned} J_\gamma(z, w, v, x_0) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\gamma^{-2} (z_k - \hat{z}_k)^T (z_k - \hat{z}_k) - (w_k^T w_k + v_k^T v_k)] - \\ & \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T Q_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

通过 Lagrange 乘子  $\lambda_k$  可以引入约束(2.1), 并考虑到式(2.2)和式(2.3), 可得增广的性能指标泛函

$$\begin{aligned} J_\gamma(z, w, v, x_0) = & \sum_{k=0}^{N-1} [\lambda_{k+1}^T (x_{k+1} - A_k x_k - D_k w_k) + \\ & \frac{1}{2} \gamma^{-2} (x_k - \hat{x}_k)^T H_k^T H_k (x_k - \hat{x}_k) - \\ & \frac{1}{2} w_k^T w_k - \frac{1}{2} (y_k - C_k x_k)^T (y_k - C_k x_k)] - \\ & \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T Q_0 (x_0 - \hat{x}_0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

由这一性能指标泛函驻值的必要条件可得两点边值

问题

$$x_{k+1} = A_k x_k + D_k D_k^T \lambda_{k+1}, \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k = & (\gamma^{-2} H_k^T H_k - C_k^T C_k) x_k + A_k^T \lambda_{k+1} + C_k^T y_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k \hat{x}_k, \\ & (2.11b) \end{aligned}$$

边界条件为

$$x_0 = \hat{x}_0 + Q_0 \lambda_0, \lambda_N = 0. \quad (2.11c)$$

实际上离散 Riccati 方程(2.6)解的性质由下列齐次方程即可确定

$$x_{k+1} = A_k x_k + D_k D_k^T \lambda_{k+1}, \quad (2.12a)$$

$$\lambda_k = (\gamma^{-2} H_k^T H_k - C_k^T C_k) x_k + A_k^T \lambda_{k+1}, \quad (2.12b)$$

边界条件为

$$x_0 = Q_0 \lambda_0, \lambda_N = 0. \quad (2.12c)$$

边值问题(2.12)存在非平凡解时, 相应的  $\gamma^{-2}$  是其特征值. 由于其属于 Hamiltonian 差分方程, 先简述这类方程特征值问题的有关结论. 考虑一般形式的离散 Hamiltonian 差分方程特征值问题

$$\Delta x_k = \tilde{A}_k x_k + \tilde{D}_k \tilde{D}_k^T \lambda_{k-1}, \quad (2.13a)$$

$$\Delta \lambda_k = (\tilde{C}_k^T \tilde{C}_k - \gamma^{-2} \tilde{H}_k^T \tilde{H}_k) x_k - \tilde{A}_k^T \lambda_{k+1}. \quad (2.13b)$$

其中差分算子  $\Delta$  的定义为  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ , 且  $0 \leq k \leq N-1$ . 其边界条件为

$$R^* \begin{pmatrix} -x_0 \\ x_{N+1} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_{N+1} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.13c)$$

方程(2.13a), (2.13b)的矩阵形式为

$$\Delta X_k = \tilde{A}_k X_k + \tilde{D}_k \tilde{D}_k^T \Lambda_{k+1}, \quad (2.14a)$$

$$\Delta \Lambda_k = (\tilde{C}_k^T \tilde{C}_k - \gamma^{-2} \tilde{H}_k^T \tilde{H}_k) X_k - \tilde{A}_k^T \Lambda_{k+1}. \quad (2.14b)$$

若对于所有的  $k \in [0, N-1]$ , Hamiltonian 差分方程(2.14)的解矩阵  $X_k, \Lambda_k$  满足  $\text{rank}(X_k^T, \Lambda_k^T) = n$  及  $X_k^T \Lambda_k = \Lambda_k^T X_k$ , 则  $(X, \Lambda)$  称为 Hamiltonian 差分方程的一个联合基(conjoined basis)<sup>[7,8]</sup>.

**定理 2.1**<sup>[7]</sup> 若差分方程的边界条件为可分离形式, 即

$$R^* = \begin{pmatrix} -R_0^* & 0 \\ 0 & R_N^* \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_N \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

并设  $(X, \Lambda)$  为式(2.14)的联合基, 且  $X_0 = -R_0^T, \Lambda_0 = R_0^{*T}$ , 则  $\gamma^{-2}$  为式(2.14)及式(2.13)的特征值当且仅当  $R_N^* X_N + R_N \Lambda_N$  为奇异矩阵.

现在令  $A_k = I + \tilde{A}_k, D_k = \tilde{D}_k, H_k = \tilde{H}_k, C_k =$



$$n_k = -\frac{\partial U_k}{\partial d_k} = -K_{aak}d_k + \rho M_k d_k - K_{abk}d_{k+1}, \quad (3.9)$$

$$n_{k+1} = \frac{\partial U_k}{\partial d_{k+1}} = K_{aak}d_k + K_{bbk}d_{k+1}, \quad (3.10)$$

则  $U_k$  可以表示为

$$U_k(d_k, d_{k+1}) = -\frac{1}{2}n_k^T d_k + \frac{1}{2}n_{k+1}^T d_{k+1}, \quad (3.11)$$

令

$$H_k(n_k, d_{k+1}) = d_{k+1}^T n_{k+1} - U_k(d_k, d_{k+1}), \quad (3.12)$$

由式(3.9), (3.10)求解  $n_{k+1}$  和  $d_k$ , 可得下列对偶方程

$$d_{k+1} = F_k d_k + G_k n_{k+1}, \quad (3.13a)$$

$$n_k = -E_k d_k + F_k^T n_{k+1}. \quad (3.13b)$$

其中

$$F_k = -K_{bbk}^{-1} K_{bak}, \quad (3.14a)$$

$$G_k = K_{bbk}^{-1}, \quad (3.14b)$$

$$E_k = K_{aak} - K_{abk} K_{bbk}^{-1} K_{bak} - \rho M = E_k^0 - \rho M. \quad (3.14c)$$

这些矩阵称为区段矩阵, 将式(3.13)与式(2.12)比较可知其一致性. 而  $H_k(n_k, d_{k+1})$  可表示为

$$H_k(n_k, d_{k+1}) = -\frac{1}{2}d_{k+1}^T E_k d_k + n_{k+1}^T F_k d_k + \frac{1}{2}n_{k+1}^T G_k n_{k+1}. \quad (3.15)$$

从而得到与一类变量变分问题(3.7)等价的两类变量变分问题

$$\delta \left[ \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1}^T d_{k+1} - (n_{k+1}^T F_k d_k - \frac{1}{2}d_k^T E_k d_k + \frac{1}{2}n_{k+1}^T G_k n_{k+1})) + \frac{1}{2}d_0^T Q_0^{-1} d_0 \right] = 0. \quad (3.16)$$

这样式(3.4)可变换为等价的两类变量广义 Rayleigh 商形式

$$\rho = \text{st} \frac{\Phi_1}{\Phi_2}. \quad (3.17)$$

其中

$$\Phi_1 = \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1}^T d_{k+1} - n_{k+1}^T F_k d_k + \frac{1}{2}d_k^T E_k^0 d_k + \frac{1}{2}n_{k+1}^T G_k n_{k+1}) + \frac{1}{2}d_0^T Q_0^{-1} d_0, \quad (3.18a)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} d_k^T M_k d_k. \quad (3.18b)$$

比较式(3.17)及式(2.20)可知其形式与意义完全一致, 所以计算广义 Rayleigh 商驻值的算法也可以用

来计算最优  $H_\infty$  范数. 因为  $d \in \mathbb{R}^{Nn+n}$ , 一般来讲特征值问题(3.1)的维数会非常大, 但这里仅需要计算一阶特征值, 所以应当选择适合这类问题的算法. 本文采用扩展 Wittrick-Williams 算法结合  $2^N$  类型的区段合并公式<sup>[9]</sup>解决这一问题. 通过定义

$$d_k = F_1 d_{k-1} + G_1 n_k, \quad (3.19a)$$

$$n_{k-1} = -E_1 d_{k-1} + F_1^T n_k, \quad (3.19b)$$

$$d_{k+1} = F_2 d_k + G_1 n_{k+1}, \quad (3.20a)$$

$$n_k = -E_1 d_k + F_1^T n_{k+1}, \quad (3.20b)$$

$$d_{k+1} = F_c d_{k-1} + G_c n_{k+1}, \quad (3.21a)$$

$$n_{k-1} = -E_c d_{k-1} + F_c^T n_{k+1}, \quad (3.21b)$$

可以导出下列合并公式

$$G_c = G_2 + F_2(G_1^{-1} + E_2)^{-1} F_2^T, \quad (3.22a)$$

$$E_c = E_1 + F_1^T(E_2^{-1} + G_1)^{-1} F_1, \quad (3.22b)$$

$$F_c = F_2(I + G_1 E_2)^{-1} F_1. \quad (3.22c)$$

很明显, 这种差分方程系数之间的关系不仅只对式(3.19)~(3.21)的情况成立, 任意两个相邻区间 1 和 2 构成一个区间  $c$  时, 对应的差分方程系数都有这一关系<sup>[9]</sup>.

## 4 最优 $H_\infty$ 范数计算 (Computation of optimal $H_\infty$ norm)

### 4.1 Wittrick-Williams 特征值计数定理 (Wittrick-Williams eigenvalue count theorem)

对于广义特征值问题

$$(K - \rho M)x = 0, \quad (4.1)$$

其中  $K > 0, K^T = K, M > 0, M^T = M, x \in \mathbb{R}^n$ . 若用  $s\{A\}$  表示对称矩阵  $A$  的负特征值个数, 并定义广义特征值问题(4.1)小于给定值的特征值  $\rho_*$  数目为其特征值计数, 用  $J(\rho_*)$  表示, 则有

$$J(\rho_*) = s\{K - \rho_* M\}. \quad (4.2)$$

如果将式(4.1)中矩阵及向量分块表达为下列形式

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = 0, \quad (4.3)$$

其中  $x_a \in \mathbb{R}^r, x_b \in \mathbb{R}^{n-r}$ . 设  $x_a = 0$ , 则有

$$(K_{bb} - \rho M_{bb})x_b = 0. \quad (4.4)$$

记式(4.4)小于  $\rho_*$  的特征值计数为  $J_0(\rho_*)$ , 并记

$$D(\rho_*) = K_{aa} - \rho_* M_{aa} - (K_{ab} - \rho_* M_{ab})(K_{bb} - \rho_* M_{bb})^{-1}(K_{ba} - \rho_* M_{ba}), \quad (4.5)$$

则有

$$J(\rho_*) = J_0(\rho_*) + s\{D(\rho_*)\}. \quad (4.6)$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 以至  $D(\rho)$  是  $\rho$  的超越函数时上述等式

依然成立<sup>[10,11]</sup>. 这里给出的是最简单的情况, 这一定理最初是用结构力学的术语描述并证明的<sup>[10]</sup>, 文[11]则给出了其数学证明. 为适应所研究问题的需要, 下面将给出扩展 Wittrick-Williams 特征值计数定理, 其最初表述见文[6].

**4.2 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数定理(Extended Wittrick-Williams eigenvalue count theorem)**

A) 无约束情况.

对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0, \quad (4.7)$$

若  $x_{k-1} = 0, x_k \neq 0$ , 则有

$$K_{bb1} x_k = 0. \quad (4.8)$$

在 4.1 节中定义  $s\{A\}$  为矩阵  $A$  的负特征值个数, 由于可逆矩阵的负特征值数目相等, 所以式(4.8)的特征值计数可记作

$$J_{R1}(\rho\#) = s\{K_{bb1}\} = s\{G_1\}. \quad (4.9)$$

由 Wittrick-Williams 特征值计数定理, 并利用式(3.14)可得问题(4.7)的特征值计数

$$J_1(\rho\#) = J_{R1}(\rho\#) + s\{E_1\}. \quad (4.10)$$

对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.11)$$

同理可得

$$J_{R2}(\rho\#) = s\{K_{bb2}\} = s\{G_2\}, \quad (4.12)$$

$$J_2(\rho\#) = J_{R2}(\rho\#) + s\{E_2\}. \quad (4.13)$$

而对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} & & \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} & K_{ab2} & \\ & K_{ba2} & K_{bb2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.14)$$

设  $x_{k-1} = 0, x_k, x_{k+1} \neq 0$ , 则有特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.15)$$

对其进行 Schur 分解

$$\begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} - K_{ab2} K_{bb2}^{-1} K_{ba2} & K_{ab2} \\ 0 & K_{bb2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_{bb2}^{-1} K_{ba2} & I \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

则问题(4.15)的特征值计数可表示为

$$J_{Rc}(\rho\#) =$$

$$J_{R1}(\rho\#) + J_{R2}(\rho\#) - s\{G_1\} + s\{G_1^{-1} + E_2\}. \quad (4.17)$$

B) 有约束情况.

考虑特征值问题(4.7)在约束  $x_{k-1} = G_0 \lambda_{k-1}, \lambda_k = 0$  情况下的特征值计数. 利用

$$\lambda_{k-1} = -K_{aa1} x_{k-1} - K_{ab1} x_k, \quad (4.18)$$

将其转化为无约束特征值问题

$$\begin{bmatrix} G_0^{-1} + K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

注意其中  $\lambda_k = 0$  的条件自然满足. 进行 Schur 分解后可得到其特征值计数公式

$$J_{RC1}(\rho\#) = J_{R1}(\rho\#) + s\{G_0^{-1} + E_1\}. \quad (4.20)$$

再考虑特征值问题

$$\begin{bmatrix} G_0^{-1} + K_{aa1} & K_{ab1} & & \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} & K_{ab2} & \\ & K_{ba2} & K_{bb2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

设  $x_{k-1} = 0$ , 则有特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.22)$$

记其特征值计数为  $J_0(\rho\#)$ , 显然有

$$J_0(\rho\#) = J_{Rc}(\rho\#), \quad (4.23)$$

按照式(4.5), 有

$$D(\rho\#) = (G_0^{-1} + K_{aa1}) - [K_{ab1} \ 0] \begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{ba1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

由分块矩阵求逆定理得

$$D(\rho\#) = G_0^{-1} + E_1 + F_1^T [G_1^{-1} - (I + E_2 G_1)^{-1} G_1^{-1}] F_1. \quad (4.25)$$

根据式(3.22)可进一步将其变换为

$$D(\rho\#) = G_0^{-1} + E_c. \quad (4.26)$$

从而特征值问题(4.21)的特征值计数为

$$J_{RCc}(\rho\#) = J_{Rc}(\rho\#) + s\{G_0^{-1} + E_c\}. \quad (4.27)$$

**4.3 算法(Algorithm)**

综上所述, 定常系统最优  $H_\infty$  范数计算的步骤如下, 时变系统的算法是类似的, 只不过需要预先存储给定各时刻的系数矩阵  $A_k, D_k, C_k, H_k$ .

0) 选择合适的  $\gamma\#^{-2}$ ;  $E = C^T C - \gamma\#^{-2} H^T H$ ;  $F = A$ ;  $G = DD^T$ ;

1)  $\{E_2 = E; G_2 = G; F_2 = F; J_{R2} = 0; E_1 = 0;$   
 $G_1 = Q_0; F_1 = I; J_{R1} = 0\};$   
 2) for  $(k = 1; k \leq K - 1; k++)\{$   
 $\{由式(3.22a) \sim (3.22c), (4.27) 计算  $E_c,$$   
 $G_c, F_c$  和  $J_{RCc}\}$   
 $\{E_1 = E_c; G_1 = G_c; F_1 = F_c; J_{R2} = J_{RCc}\}$   
 $if(J_{RCc} > 0)\{中断循环; 选择较小的  $\gamma_{\#}^{-2}$  重$   
 $新开始\}\};$   
 3) if  $(J_{RCc} > 0)$   
 $\{\gamma_{\#}^{-2}$  是  $\gamma_{opt}^{-2}$  的一个上界 (upperbound), 在  
 $重新计算时应减小\}$   
 else  
 $\{\gamma_{\#}^{-2}$  为次优参数, 是  $\gamma_{opt}^{-2}$  的一个下界  
 $(lowerbound)\}$   
 $if(upperbound - lowerbound) > \epsilon (\epsilon$  是预先选  
 $定的小正实数)$   
 $\{增加  $\gamma_{\#}^{-2}$  重新计算\}$   
 else  
 $\{break\}.$

迭代可以在满足精度要求后终止, 并取 lowerbound 作为  $\gamma_{opt}^{-2}$ . 另外, 上述步骤中计算出的序列  $G_k$  就是 Riccati 方程(2.17)的解矩阵  $Q_k$ , 这与连续系统是一致的<sup>[4,5]</sup>. 对于给定的  $\gamma > \gamma_{opt}$ , 当  $N$  趋向于无穷时,  $Q_N$  趋近无限长时间问题中 Riccati 代数方程的解.

## 5 算例(Examples)

第一个算例取自文[3], 参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5079 & 0.7594 \\ -0.7594 & 0.2801 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4921 \\ 0.7594 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1], H = [1 \ 0].$$

计算结果见表1. 当  $N$  逐渐增大时, 最优  $H_{\infty}$  范数趋近于一个定值, 这个值也是无限时间滤波问题的最优  $H_{\infty}$  范数.

表1 最优  $H_{\infty}$  范数  
Table 1 Optimal  $H_{\infty}$  norm

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$
$\gamma_{opt}$	1.17627	1.18541	1.18609	1.18609	1.18609

第二个算例是将文[4]中例2的连续系统离散化后的系统, 原系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 39.4 & 3.8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} w,$$

$$y = [1.0 \ 0.0]x + v, z = [0.0 \ 0.2]x.$$

设输入端有零阶保持器, 采样时间为  $T = 10/2^7 =$

0.078125, 则离散后的系统为

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.136 & 0.095 \\ 3.729 & 1.495 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.095 \end{bmatrix} w_k,$$

$$y_k = [1.0 \ 0.0]x_k + v_k, z_k = [0.0 \ 0.2]x_k.$$

取  $N = 2^7$  计算, 得  $\gamma_{opt} = 1.69185$ . 为进行比较, 取同样长的时间段, 即对原连续系统取  $T = 10$  计算, 得  $\gamma_{opt} = 1.69183$ , 可见按这里的采样间隔时两个结果是一致的. 这两个算例中均取  $\epsilon = 10^{-6}$ .

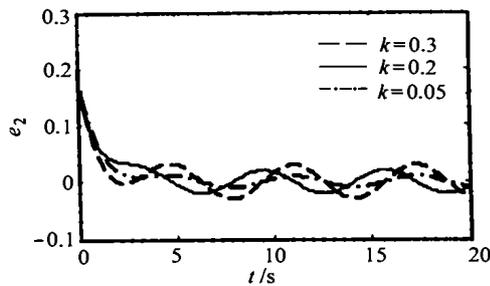
## 6 结束语(Conclusion)

对于连续  $H_{\infty}$  滤波系统,  $\gamma_{opt}^{-2}$  是 Hamilton 微分方程两端点边值问题的一阶特征值, 本文的研究进一步表明离散  $H_{\infty}$  滤波系统的  $\gamma_{opt}^{-2}$  与 Hamilton 差分方程的一阶特征值之间也存在着同样的对应关系. 另外, 利用 Legendre 变换及广义 Rayleigh 商概念, 本文还指出了  $\gamma_{opt}^{-2}$  与矩阵广义特征值的对应关系. 因为基于特征值计数的扩展 Wittrick-Williams 算法可以方便地求解本文的特征值问题, 所以本文将其用于计算最优  $H_{\infty}$  范数, 并给出了特征值计数定理的证明.

## 参考文献(References):

- [1] NAGPAL K M, KHARGONEKAR P P. Filtering and smoothing in an  $H_{\infty}$  setting [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(2): 152 - 166.
- [2] YAESH I, SHAKED U. Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum  $H_{\infty}$ -norm estimation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(6): 828 - 831.
- [3] SHEN Xuemin, DENG Li. Game theory approach to discrete  $H_{\infty}$  filter design [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(4): 1092 - 1095.
- [4] ZHONG Wanxie, WILLIAMS F W.  $H_{\infty}$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration [J]. *Int J of Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(7): 1017 - 1030.
- [5] WU Zhigang, ZHONG Wanxie. Precise integration method for numerical solution to filtering problem [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28 (2): 201 - 208 (in Chinese).
- [6] ZHONG Wanxie, WILLIAMS F W, BENNETT P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems [J]. *J of Vibration and Acoustics - Transactions of the ASME*, 1997, 119 (7): 334 - 340.
- [7] BOHER M. Discrete linear Hamiltonian eigenvalue problems [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1998, 36(10/12): 179 - 192.
- [8] BOHER M. Linear Hamiltonian difference systems: disconjugacy and Jacobi type conditions [J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, 199(3): 804 - 826.

(下转第32页)

图2 跟踪误差曲线  $e_2$ Fig. 2 The tracking error curve  $e_2$ 

## 6 结论(Conclusion)

本文首先对一类多输入多输出仿射非线性不确定性系统进行反馈线性化分析,然后对线性化后的非线性系统设计了自适应  $H_\infty$  控制器,同时把神经网络的逼近误差引入到自适应率中,加快了逼近速度,从而改变了系统的动态性能.最后通过一个机械手在水平位置上的运动实例验证了所设计控制器的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] LIU Chenchen, CHEN Fuchuang. Adaptive control of non-linear continuous systems using neural networks-general relative degree and MIMO cases [J]. *Int J Control*, 1993, 58(2): 317 - 335.
- [2] NARENDRA K S, MUKHOPADHYAY S. Adaptive control of non-linear multivariable system using neural networks [J]. *Neural Networks*, 1994, 7(5): 737 - 752.
- [9] ZHONG Wanxie, LIN Jiahao, QIU Chunhang. Computational structural mechanics and optimal control-the simulation of substructural chain theory to linear quadratic optimal control problems [J]. *Int J of Numerical Methods in Engineering*, 1992, 33(1): 197 - 211.
- [10] WITTRICK W H, WILLIAMS F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures [J]. *Quarterly J of Mechanics and Applied Mathematics*, 1971, 24 (3): 263 - 284.
- [11] BALAKRISHNAN A V. Generalization of the Wittrick-Williams formula for counting modes of flexible structures [J]. *J of Guidance*,

- [3] LIU G P, KADIRKAMANATHAN V, BILLINGS S A. Variable neural networks for adaptive control of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans Systems, Man, and Cybernetics-Part C*, 1999, 29(1): 34 - 43.
- [4] PATINO H D, LIU Derong. Neural network-based model reference adaptive control system [J]. *IEEE Trans Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, 2001, 30(2): 198 - 204.
- [5] SANNER R, SLOTINE J J. Gaussian networks for direct adaptive control [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 - 864.
- [6] TANG Jiantao, TONG Shaocheng. Adaptive  $H_\infty$  control of nonlinear systems based on neural networks [J]. *Control and Decision*, 1999, 14 (4): 297 - 302 (in Chinese).
- [7] TONG Shaocheng, TANG Jiantao, WANG Tao. Fuzzy adaptive control of multivariable nonlinear systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111(2), 163 - 167.

## 作者简介:

陈 谋 (1975 —), 男, 1994 年于南京航空航天大学获学士学位, 现为南航自动化学院博士研究生. 主要研究方向为不确定系统控制方法研究和综合火/飞/推控制. Email: chenmouse@hotmail.com;

姜长生 (1942 —), 男, 教授, 博士生导师. 已出版专著 5 部, 发表论文 100 余篇, 获省部级科研成果奖 7 项. 目前主要研究方向为鲁棒控制, 智能控制和综合火飞控制等;

吴庆尧 (1955 —), 男, 教授. 发表论文 40 余篇, 著作 4 部, 获省部级成果奖 12 项. 目前主要研究方向为鲁棒控制, 工业过程控制等;

曹邦武 (1975 —), 男, 南京航空航天大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为智能控制等.

*Control, and Dynamics*, 1995, 18(6): 1410 - 1415.

## 作者简介:

吴志刚 (1971 —), 男, 博士, 副教授. 研究兴趣为  $H_\infty$  控制系统设计中的数值方法, 结构振动主动控制等. Email: wuzhg@dlut.edu.cn;

钟万镛 (1934 —), 男, 教授, 中国科学院院士. 目前主要研究领域包括工程力学中的哈密顿体系,  $H_\infty$  控制理论等.