

基于核和灰度的区间灰数多属性决策方法

郭三党^{1,2}, 刘思峰¹, 方志耕¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 河南农业大学 信息与管理科学学院, 郑州 450002)

摘要: 针对属性值为区间灰数且部分权重信息已知的多属性决策问题, 提出一种基于区间灰数的核和灰度的决策方法. 根据专家评价值的取值范围设置区间灰数的取值论域, 给出了区间灰数的基于核和灰度的简化形式, 建立了普通区间灰数到标准区间灰数的转化方法, 分别基于标准灰数的核和灰度分别求取属性的权重, 进而得到属性的综合权重, 并提出了一种基于标准区间灰数相对核的排序方法对方案进行排序. 最后通过一个算例验证了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 多属性决策; 标准区间灰数; 相对核; 灰度

中图分类号: N945

文献标志码: A

Multi-attribute decision making model based on kernel and degree of greyness of interval grey numbers

GUO San-dang^{1,2}, LIU Si-feng¹, FANG Zhi-geng¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. College of Information and Management Science, He'nan Agricultural University, Zhengzhou 450002, China.

Correspondent: GUO San-dang, E-mail: guosandang@163.com)

Abstract: In view of the multi-objective decision problem that the attribute values are interval grey numbers and the attribute weights partially known, the multi-objective decision-making method based on the kernel and the degree of greyness of the interval grey numbers is proposed. Considering the scope of the expert evaluation, the domain of discourse and the simplified forms of the interval grey number based on the kernel and the degree of greyness of grey numbers are given. The conversion method from the ordinary interval grey numbers to standard grey numbers is designed. The attribute weight vector is solved respectively based on the kernel and the degree of greyness of the standard grey numbers. An ordering method based on the relative kernel of the standard grey numbers is proposed and is used to sort the project. Finally, an example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: multi-attribute decision making; standard interval grey numbers; relative kernel; degree of greyness of grey numbers

0 引言

多属性决策问题广泛存在于经济、管理、工程和军事等各个领域^[1-4]. 在传统的决策模型中, 决策参数通常被处理成确切的数值. 然而, 由于社会经济系统的复杂性以及人们认知能力的局限性, 决策者往往无法给出效果测度和指标权重的具体数值, 只能给出一个决策区间范围, 区间范围的上下限表示决策者的最保守及最乐观的看法, 相应的决策问题也表现出某

种不确定性^[5-7], 使得决策者不能按照确定性决策方法进行决策, 因此不确定性决策的研究有着重要的理论意义和应用价值. 灰色系统理论是由邓聚龙教授创立的用于解决现实世界不确定性决策问题的一种方法, 迄今有关这方面的研究已取得了一些进展^[8-10]. 文献[11]研究了指标值为区间灰数的基于灰色区间关联系数的特征向量决策方法; 文献[12]给出了判断灰区间最优真值的方法, 探讨了基于灰区间偏好的群

收稿日期: 2015-05-19; 修回日期: 2015-09-13.

基金项目: 国家社科基金重大项目(10zd & 014); 江苏省研究生培养创新工程; 中央高校基本科研业务费专项资金项目(CXLX12-0177).

作者简介: 郭三党(1973—), 女, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论、供应链管理的研究; 刘思峰(1955—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

体决策方法; 文献[13]研究了群体专家权重的确定方法, 构建了方案偏好和属性值均为区间数的多属性群决策模型; 文献[14]构建了基于区间灰数相离度的灰色区间关联系数及关联度, 基于最小最大后悔值方法对决策属性值为区间灰数且权重信息部分已知的灰色多属性群决策问题进行了排序; 文献[15]用灰色矩阵关联度法对风险型动态混合多属性决策进行了研究.

自文献[16]研究了区间数的比较以来, 研究灰数的文献大多借鉴区间数的方法, 背离了区间灰数的本质意义. 目前, 以最能代表区间灰数的核和灰度去探讨属性值为区间灰数的不确定性多属性决策问题的研究尚未见报道. 为此, 本文首先给出区间灰数的核和灰度的定义以及区间灰数的简化形式, 定义标准区间灰数, 通过区间灰数的论域将决策矩阵转化为标准灰数的简化形式; 在此基础上, 建立非线性规划模型, 分别求得基于核的权重和基于灰度的权重, 由此计算出属性值的综合权重, 得出方案的综合评价; 给出区间灰数的相对核和精度的排序方法, 并据此选择最优方案.

1 基本概念和定义

定义 1^[17] 设灰数 $\otimes \in [a, b] (a < b)$ 产生的背景或论域为 Ω , $\mu(\otimes) = b - a$ 为灰数 $\otimes$ 取值域的测度, 在缺乏灰数 $\otimes$ 取值分布信息的情况下, 称 $\hat{\otimes} = \frac{1}{2}(a + b)$ 为灰数 $\otimes$ 的核, $g^0(\otimes) = \mu(\otimes)/\mu(\Omega)$ 为灰数 $\otimes$ 的灰度, 基于核和灰度的区间灰数 $\otimes$ 可以简记为 $\hat{\otimes}_{(g^0)}$.

命题 1^[17] 对于区间灰数而言, 其简化形式既包含区间灰数上限和下限的信息, 又与区间灰数一一对应, 即区间灰数的简化形式与原区间灰数具有同等的信息量.

给定区间灰数 $\otimes = [a, b] (a < b)$, 按照核和灰度的定义可以分别计算出核和灰度, 即可得到区间灰数的简化形式; 反之, 当简化形式已知时, 则可以根据核确定区间灰数核的中心位置, 同时根据灰度计算出区间灰数的测度, 进而得到区间灰数取值的上限和下限, 从而得到区间灰数. 区间灰数与其简化形式一一对应.

定义 2^[17] 设 Ω 为灰数 $\otimes$ 的论域, 当 $\Omega \in [0, 1]$ 时, 对应的灰数称为标准灰数.

命题 2^[17] 设 $\otimes$ 为标准灰数, 则 $g^0(\otimes) = \mu(\otimes)$.

显然, 对于标准灰数, 其灰度与灰数的测度完全一致.

公理 1 (灰度不减公理)^[17] 两个灰度不同的区

间灰数进行和、差、积、商运算时, 运算结果的灰度不小于灰度较大的区间灰数的灰度.

设有两区间灰数 $\otimes_1 \in [a_1, b_1] (a_1 < b_1)$, 简记为 $\hat{\otimes}_{1(g_1^0)}$, $\otimes_2 \in [a_2, b_2] (a_2 < b_2)$, 简记为 $\hat{\otimes}_{2(g_2^0)}$, 则有如下运算法则^[17]:

法则 1 $\hat{\otimes}_{1(g_1^0)} + \hat{\otimes}_{2(g_2^0)} = (\hat{\otimes}_1 + \hat{\otimes}_2)_{(g_1^0 \vee g_2^0)}$;

法则 2 $\hat{\otimes}_{1(g_1^0)} - \hat{\otimes}_{2(g_2^0)} = (\hat{\otimes}_1 - \hat{\otimes}_2)_{(g_1^0 \vee g_2^0)}$;

法则 3 $\hat{\otimes}_{1(g_1^0)} \times \hat{\otimes}_{2(g_2^0)} = (\hat{\otimes}_1 \times \hat{\otimes}_2)_{(g_1^0 \vee g_2^0)}$;

法则 4 $\hat{\otimes}_{1(g_1^0)} / \hat{\otimes}_{2(g_2^0)} = (\hat{\otimes}_1 / \hat{\otimes}_2)_{(g_1^0 \vee g_2^0)}$.

可以将灰数的运算法则推广到有限个灰数进行和、差、积、商运算的情形. 当若干个区间灰数进行运算时, 首先对核进行相应运算, 然后按照取大准则得到运算结果的灰度, 从而得到运算结果的简化形式^[17].

区间灰数是由区间灰数的核和区间灰数的灰度两个因素决定的, 因此, 区间灰数的比较既要考虑到核, 也要考虑到灰度. 下面给出标准灰数的相对核的概念.

定义 3^[18] 设灰数 $\otimes$ 为标准灰数, $\hat{\otimes}$ 为标准灰数 $\otimes$ 的核, $g^0(\otimes)$ 为标准灰数 $\otimes$ 的灰度, 则称

$$\gamma(\otimes) = \frac{1}{1 + g^0(\otimes)}$$

为标准灰数 $\otimes$ 的精度, 称

$$\delta(\otimes) = \gamma(\otimes) \times \hat{\otimes}$$

为标准灰数 $\otimes$ 的相对核.

定义 4^[18] 设标准灰数 $\otimes_1$ 和 $\otimes_2$ 的相对核分别为 $\delta(\otimes_1)$ 和 $\delta(\otimes_2)$, 精度分别为 $\gamma(\otimes_1)$ 和 $\gamma(\otimes_2)$, 则:

1) 若 $\delta(\otimes_1) > \delta(\otimes_2)$, 则 $\otimes_1 \succ \otimes_2$.

2) 若 $\delta(\otimes_1) < \delta(\otimes_2)$, 则 $\otimes_1 \prec \otimes_2$.

3) 若 $\delta(\otimes_1) = \delta(\otimes_2)$, 则:

① 若 $\gamma(\otimes_1) > \gamma(\otimes_2)$, 则 $\otimes_1 \succ \otimes_2$;

② 若 $\gamma(\otimes_1) < \gamma(\otimes_2)$, 则 $\otimes_1 \prec \otimes_2$;

③ 若 $\gamma(\otimes_1) = \gamma(\otimes_2)$, 则 $\otimes_1 = \otimes_2$.

当区间灰数的灰度为零时, 区间灰数的比较便转化为实数之间的比较.

2 基于核和灰度的区间灰数多属性决策模型

2.1 问题描述

设不确定性多属性决策问题由 m 个决策方案组成的方案集为

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_m),$$

n 个评价指标组成的属性集为

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\},$$

属性权重为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

其中: $\omega_j^L \leq \omega_j \leq \omega_j^U$, $0 \leq \omega_j^L \leq \omega_j^U \leq 1$, 且 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$.

1. 决策者在 j 指标下对方案 i 的评价值为区间灰数 $x_{ij}(\otimes)$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, x_{ij} = [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$, 其中 x_{ij}^L 和 x_{ij}^U 分别为方案 s_i 在指标 c_j 下的效果样本值的下限和上限. 则方案集 S 对指标集 C 的效果样本矩阵为

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}(\otimes) & x_{12}(\otimes) & \cdots & x_{1n}(\otimes) \\ x_{21}(\otimes) & x_{22}(\otimes) & \cdots & x_{2n}(\otimes) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}(\otimes) & x_{m2}(\otimes) & \cdots & x_{mn}(\otimes) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_{11}^L, x_{11}^U] & [x_{12}^L, x_{12}^U] & \cdots & [x_{1n}^L, x_{1n}^U] \\ [x_{21}^L, x_{21}^U] & [x_{22}^L, x_{22}^U] & \cdots & [x_{2n}^L, x_{2n}^U] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [x_{m1}^L, x_{m1}^U] & [x_{m2}^L, x_{m2}^U] & \cdots & [x_{mn}^L, x_{mn}^U] \end{bmatrix}.$$

常用的评价指标的属性有两种: 一种是效益型属性, 其属性值越大越好; 一种是成本型属性, 其属性值越小越好. 为了消除量纲的影响, 使各属性具有可比性, 应对决策矩阵进行规范化. 下面给出规范决策矩阵的计算公式.

令 $x_j^- = \min_i(x_{ij}^L)$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$; $x_j^+ = \max_i(x_{ij}^U)$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. $d_j = x_j^+ - x_j^-$ 称为 j 属性的极差, 取 d_j 为 j 属性的论域测度. 若指标 j 属于效益型指标, 则

$$r_{ij}^L = \frac{x_{ij}^L - x_j^-}{d_j}, \quad (1)$$

$$r_{ij}^U = \frac{x_{ij}^U - x_j^-}{d_j}; \quad (2)$$

若指标 j 属于成本型指标, 则

$$r_{ij}^L = \frac{x_j^+ - x_{ij}^U}{d_j}, \quad (3)$$

$$r_{ij}^U = \frac{x_j^+ - x_{ij}^L}{d_j}. \quad (4)$$

规范化后的决策矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} [r_{11}^L, r_{11}^U] & [r_{12}^L, r_{12}^U] & \cdots & [r_{1n}^L, r_{1n}^U] \\ [r_{21}^L, r_{21}^U] & [r_{22}^L, r_{22}^U] & \cdots & [r_{2n}^L, r_{2n}^U] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [r_{m1}^L, r_{m1}^U] & [r_{m2}^L, r_{m2}^U] & \cdots & [r_{mn}^L, r_{mn}^U] \end{bmatrix}.$$

可以证明, 规范化后的决策矩阵元素为标准灰数, 且标准灰数的灰度与原区间灰数的灰度一致.

将决策矩阵 R 转换成如下简化形式:

$$R' = \begin{bmatrix} \hat{\otimes}_{11}(g_{11}^0) & \hat{\otimes}_{12}(g_{12}^0) & \cdots & \hat{\otimes}_{1n}(g_{1n}^0) \\ \hat{\otimes}_{21}(g_{21}^0) & \hat{\otimes}_{22}(g_{22}^0) & \cdots & \hat{\otimes}_{2n}(g_{2n}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\otimes}_{m1}(g_{m1}^0) & \hat{\otimes}_{m2}(g_{m2}^0) & \cdots & \hat{\otimes}_{mn}(g_{mn}^0) \end{bmatrix}.$$

2.2 指标权重的确定

由下面的规划模型 LP1 可求得基于核的权重:

$$\text{LP1} \quad \min \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \hat{\otimes}_{ij} \omega_j;$$

$$\omega_j^L \leq \omega_j \leq \omega_j^U, \\ \sum_{j=1}^n \omega_j = 1.$$

由下面的规划模型 LP2 可求得基于灰度的权重:

$$\text{LP2} \quad \min \eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu(\otimes_{ij}) \omega_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g^0(\otimes_{ij}) \omega_j;$$

$$\omega_j^L \leq \omega_j \leq \omega_j^U, \\ \sum_{j=1}^n \omega_j = 1.$$

设由规划模型 LP1 求得的基于核的权重向量为

$$\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n),$$

由规划模型 LP2 求得的基于灰度的权重向量为

$$\omega'' = (\omega''_1, \omega''_2, \dots, \omega''_n),$$

综合权重为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

其中

$$\omega_j = \beta \omega'_j + (1 - \beta) \omega''_j, \quad 0 < \beta < 1, \quad (5)$$

则方案 s_i 的综合属性值为

$$\sigma_i(\otimes) = \hat{\otimes}_i(g_i^0). \quad (6)$$

其中: $\sigma_i(\otimes)$ 为区间灰数, 核为 $\hat{\otimes}_i = \sum_{j=1}^n \hat{\otimes}_{ij} \omega_j$, 灰度为 $g_i^0 = \max_j(g_{ij}^0)$.

2.3 决策步骤

综上所述, 基于核和灰度的区间灰数多属性决策步骤如下.

Step 1: 根据决策问题构造评价值的样本矩阵;

Step 2: 求出决策矩阵的各属性的论域测度, 并对各指标进行规范化处理, 求出规范化后的决策矩阵的基于核和灰度的简化形式的决策矩阵;

Step 3: 根据规划模型 LP1 及 LP2, 求得基于核的权重向量 $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$ 以及基于灰度的权重向量 $\omega'' = (\omega''_1, \omega''_2, \dots, \omega''_n)$, 并求出综合权重向量 $\omega =$

$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$;

Step 4: 求出方案的综合评价值, 并对方案进行排序.

3 算例分析

在复杂装备某关键器件供应商选择中, 经过初步调查, 有4家供应商 $S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ 入围, 现对4家供应商进一步筛选. 专家给出了4个考核指标: 产品质量 c_1 , 产品价格 c_2 , 产品竞争力 c_3 , 产品设计方案 c_4 . 产品质量、产品竞争力和产品设计方案为效益型指标, 产品价格为成本型指标. 下面根据所提出的方法选择最优供应商.

Step 1: 根据调查所对应的各能力指数, 建立评价样本矩阵如下:

$$X = \begin{bmatrix} [9.4, 9.8] & [15.0, 15.6] & [14.0, 15.0] & [9.6, 9.8] \\ [9.2, 9.6] & [15.0, 15.4] & [15.5, 16.0] & [9.3, 9.8] \\ [9.0, 9.4] & [14.8, 15.2] & [15.0, 16.0] & [9.0, 9.4] \\ [9.1, 9.7] & [14.5, 15.3] & [15.5, 16.0] & [9.2, 9.6] \end{bmatrix}.$$

Step 2: 求出各属性的论域, 并将决策矩阵规范化. 规范化后的决策矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} [0.5000, 1.0000] & [0.0000, 0.5455] \\ [0.2500, 0.7500] & [0.1818, 0.5455] \\ [0.0000, 0.5000] & [0.3636, 0.7273] \\ [0.1250, 0.8750] & [0.2727, 1.0000] \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} [0.0000, 0.5000] & [0.7500, 1.0000] \\ [0.7500, 1.0000] & [0.3750, 1.0000] \\ [0.5000, 1.0000] & [0.0000, 0.5000] \\ [0.7500, 1.0000] & [0.2500, 0.7500] \end{bmatrix} \leftarrow$$

基于核和灰度的决策矩阵的简化形式为

$$R' = \begin{bmatrix} 0.7500_{(0.5000)} & 0.2727_{(0.5455)} \\ 0.5000_{(0.5000)} & 0.3636_{(0.3636)} \\ 0.2500_{(0.5000)} & 0.5455_{(0.3636)} \\ 0.5000_{(0.7500)} & 0.6364_{(0.7273)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.2500_{(0.5000)} & 0.8750_{(0.2500)} \\ 0.8750_{(0.2500)} & 0.6875_{(0.6250)} \\ 0.7500_{(0.5000)} & 0.2500_{(0.5000)} \\ 0.8750_{(0.2500)} & 0.5000_{(0.5000)} \end{bmatrix} \leftarrow$$

Step 3: 建立规划模型 LP1 和 LP2, 确定单目标优化方程, 采用 Lingo 软件求解, 得到指标权重向量分别为

$$\omega' = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1),$$

$$\omega'' = (0.25, 0.15, 0.4, 0.2);$$

取 $\beta = 0.5$, 得综合权重向量为

$$\omega = (0.325, 0.225, 0.3, 0.15).$$

Step 4: 方案的综合属性值为

$$\sigma(\otimes) = [\sigma_1(\otimes), \sigma_2(\otimes), \sigma_3(\otimes), \sigma_4(\otimes)] = [0.5114_{(0.5455)}, 0.6099_{(0.625)}, 0.4665_{(0.5)}, 0.6432_{(0.75)}].$$

由定义3可求得方案的综合属性值的相对核为

$$\delta(\otimes_1) = 0.3309,$$

$$\delta(\otimes_2) = 0.3753,$$

$$\delta(\otimes_3) = 0.3110,$$

$$\delta(\otimes_4) = 0.3675.$$

因为 $\delta(\otimes_2) > \delta(\otimes_4) > \delta(\otimes_1) > \delta(\otimes_3)$, 所以方案2最优.

4 结 论

对于权重信息部分已知且决策信息为区间灰数的不确定性多属性决策问题, 本文给出了规范决策矩阵的计算公式, 得到了标准区间灰数简化形式的决策矩阵, 充分利用了区间灰数的核和灰度的信息求取属性的权重, 利用同时包含核和灰度信息的相对核对标准区间灰数进行排序; 在此基础上, 提出了一种基于核和灰度的区间灰数的决策模型. 与其他模型相比, 该模型简洁合理, 所需计算量小, 并充分考虑了区间灰数的特征, 使得决策结果更为科学合理.

另外, 本文模型可进一步扩展. 由文中基于核和灰度的权重的计算方法可见: 如果对于所有方案某一属性的属性值的核都较大, 则该属性的基于核的权重较小; 如果对于所有方案某一属性的属性值的灰度都较大, 则该属性的基于灰度的权重较小. 因此, 本文方法可供重视核较小的、灰度较小的属性决策者选用. 同理, 如果将规划模型中的 $\min \phi, \min \eta$ 换成 $\max \phi, \max \eta$, 则可供重视核较大的、灰度较大的属性决策者选用; 如果将规划模型中的 $\min \phi, \min \eta$ 换成 $\max \phi, \min \eta$, 则可供重视核较大的、灰度较小的属性决策者选用; 如果将规划模型中的 $\min \phi, \min \eta$ 换成 $\min \phi, \max \eta$, 则可供重视核较小的、灰度较大的属性决策者选用. 决策者应根据实际情况选择合适的决策方法进行决策.

参考文献(References)

- [1] Yang J P, Qiu W H. A measure of risk and a decision making model based on expected utility and entropy[J]. *European J of Operational Research*, 2005, 164(3): 792-799.
- [2] Hwang C L, Yoon K. Multiple at tribute decision making: Methods and applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1981: 99-103, 128-140.
- [3] Kahraman C, Cebi S. A new multi attribute decision making method: Hierarchical fuzzy axiomatic design[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(3): 4848-4861.
- [4] Fan Z P, Feng B. A multiple attributes decision making method using individual and collaborative attribute data in a fuzzy environment[J]. *Information Science*, 2009, 179(20): 3603-3618.
- [5] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. *J of Grey System*, 1989, 1(1): 1-24.
- [6] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey systems: Foundations, methodology and application[M]. Slippery Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998: 40-77.
- [7] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 30-90.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. Basis of grey technology and its application[M]. Beijing: Science Press, 2005: 30-90.)
- [8] Zavadskas E K, Kaklauskas A, Turskis Z. Multi-attribute decision-making model by applying grey numbers[J]. *Informatica*, 2009, 20(2): 305-320.
- [9] Luo D, Wang X. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three parameter interval grey number[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(5): 1957-1963.
- [10] 李鹏, 刘思峰. 基于灰色关联分析和D-S证据理论的区间直觉模糊决策方法[J]. *自动化学报*, 2011, 37(8): 993-999.
(Li P, Liu S F. Interval-valued intuitionist fuzzy numbers decision-making method based on grey incidence analysis and D-S theory of evidence[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(8): 993-999.)
- [11] 罗党. 灰色决策问题的特征向量方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 25(4): 67-71.
(Luo D. An eigenvector method for grey decision making[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2005, 25(4): 67-71.)
- [12] 巩在武, 郭崇兰, 周显信. 基于灰区间真值的群体决策方法及应用[J]. *南京信息工程大学学报: 自然科学版*, 2013, 5(2): 171-177.
(Gong Z W, Guo C L, Zhou X X. Group decision making based on true value for grey intervals[J]. *J of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition*, 2013, 5(2): 171-177.)
- [13] 万树平. 区间型多属性群体专家权重的确定方法[J]. *应用数学与计算数学学报*, 2008, 22(2): 109-116.
(Wan S P. Method of determining expels weights for interval multi-attribute group decision making[J]. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2008, 22(2): 109-116.)
- [14] 陈孝新, 刘思峰. 一种部分权重信息的灰色多属性群决策方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(4): 843-846.
(Chen X X, Liu S F. Grey multiple attribute group decision-making method with partial weight information[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(4): 843-846.)
- [15] 饶从军, 肖新平. 风险型动态混合多属性决策的灰矩阵关联度法[J]. *系统工程与电子技术*, 2006, 28(9): 1353-1357.
(Rao C J, Xiao X P. Method of grey matrix relative degree for dynamic hybrid multi-attribute decision making under risk[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(9): 1353-1357.)
- [16] Xu Z S. Dependent uncertain ordered weighted aggregation operators[J]. *Information Fusion*, 2008, 9(2): 310-316.
- [17] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the “kernel” and the degree of greyiness of grey numbers[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(2): 313-316.)
- [18] 闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于相对核和精确度的灰数排序方法[J]. *控制与决策*, 2014, 29(2): 315-319.
(Yan S L, Liu S F, Zhu J J, et al. The ranking method of grey numbers based on relative kernel and degree of accuracy[J]. *Control and decision*, 2014, 29(2): 315-319.)

(责任编辑: 曹洪武)