

文章编号: 1001-0920(2007)11-1313-04

求解多目标优化问题的一种多子群体进化算法

张利彪, 周春光, 刘小华, 许相莉, 孙彩堂

(吉林大学 计算机科学与技术学院, 长春 130012)

摘要: 提出一种新的多目标粒子群优化(MOPSO)算法. 根据多目标优化问题(MOP)的特点, 将一个进化群体分成若干个子群体, 利用非劣支配的概念构造全局最优区域, 用以指导整个粒子群的进化. 通过子群体间的信息交换, 使整个群体分布更均匀, 并且避免了局部最优, 保证了解的多样性, 通过很少的迭代次数便可得到分布均匀的 Pareto 有效解集. 数值实验表明了该算法的有效性.

关键词: 多目标优化; 粒子群优化算法; 非劣最优解

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A

A multiple subswarms evolutionary algorithm for multi-objective optimization problems

ZHANG Li-biao, ZHOU Chun-guang, LIU Xiao-hua, XU Xiang-li, SUN Cai-tang

(College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012, China. Correspondent: ZHOU Chun-guang, E-mail: cgzhou@jlu.edu.cn)

Abstract: A new MOPSO algorithm is proposed, which divides a evolutionary swarm into several subswarms based on trait of MOP and uses Pareto dominance concepts to construct the globally optimal region. The region guides the evolutionary of whole particle swarm. By the exchange informations among the particles, the whole particle swarm distributes uniformly and avoids local optimum, and the diversity of the solution is ensured. The uniformly distributed Pareto optimal set is obtained by a few iterations. Numerical simulations show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Multi-objective optimization; Particle swarm optimization; Pareto optimal solution

1 引言

在科学实践、工程系统设计及社会生产活动中, 许多优化问题都是多目标优化问题(MOP). 对于大多数 MOP 而言, 各目标函数间可能是冲突的, 这就意味着 MOP 不存在唯一的全局最优解使所有的目标函数同时最优. 但可能存在这样的解: 对一个或几个目标函数不能进一步优化, 而对其他目标函数不至于劣化, 这样的解称之为非劣最优解. 由所有非劣最优解组成的集合称为 MOP 的非劣最优解集. 因此, 求解 MOP 实际上就是寻找非劣最优解集. 传统的求解 MOP 的方法是将 MOP 转化为单目标优化问题来处理, 但该方法要求对问题本身有很强的先验认识, 在现实中难以处理真正的 MOP. 基于种群

操作的进化计算可隐并行地搜索解空间中的多个解, 并能利用不同解之间的相似性来提高其并发求解的效率, 因此进化计算非常适合求解 MOP.

粒子群优化(PSO)算法是由 Kennedy 和 Eberhart^[1]于 1995 年提出的一种进化算法. 用 PSO 算法求解 MOP 的算法称为多目标 PSO(MOPSO)算法. Fieldsend 和 Singh^[2]基于 PSO 算法, 应用非约束的存档方案和一个支配树的数据结构来求解 MOP. Coello 和 Lechuga^[3]在非劣最优概念的基础上, 通过记录找到的非支配向量构成非支配集, 并用此集中的解来指导其他粒子的飞行. Parsopoulos 和 Vrahatis^[4]应用权重聚合的方法, Hu 和 Eberhart^[5]应用动态邻近的 PSO 算法, 来求解

收稿日期: 2006-07-18; 修回日期: 2006-10-30.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60433020, 60673099); 教育部“符号计算与知识工程”重点实验室项目(02090); 国家 985 工程项目.

作者简介: 张利彪(1973—), 男, 内蒙古固阳人, 博士, 从事计算智能和图像处理的研究; 周春光(1949—), 男, 长春人, 教授, 博士生导师, 从事计算智能、模式识别等研究.

MOP. 本文提出一种新的 MOPSO 算法, 根据 MOP 的特点, 将一个进化群体在不同的子目标方向上分成几个具有不同进化方向的子群体, 并利用非劣支配的概念定义了个体间的支配关系; 然后找出每个子群体中的最优非支配粒子, 组成一个非支配集. 非支配集中的个体构成了一个全局最优区域, 用以指导整个粒子群的进化. 该算法通过很少的迭代次数便可得到分布均匀的 Pareto 有效解集.

2 多子群多目标 PSO 算法

2.1 多目标优化问题

通常一个 MOP 可表示为

$$\begin{aligned} \min y = f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \\ \text{s. t. } g_i(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: 决策向量 $x \in R^m$, 目标向量 $y \in R^n$, $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是目标函数, $g_i(x) = 0$ 是约束条件.

定义 1 若 $x^* \in R^m$ 是搜索空间中一点, 则 x^* 为非劣最优解, 当且仅当不存在 i (在搜索空间中) 使得 $f_i(x) < f_i(x^*)$ 成立.

定义 2 由所有非劣最优解组成的集合称为 MOP 的非劣最优解集, 也称为可接受解集或有效解集.

相应非劣最优解的目标向量称为非支配目标向量. 所有非支配的目标向量构成 MOP 的非劣最优目标域. 由于向量的大小比较是偏序关系, 下面给出非劣最优解向量的支配关系的定义:

定义 3 设 $u, v \in R^m$, 则向量 u 支配向量 v , 记为 $u < v$, 当且仅当

$$\begin{aligned} f_i(u) &\leq f_i(v), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \\ f_j(u) &< f_j(v), \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

由非支配向量组成的集合称为非支配集.

2.2 标准 PSO 算法

在 PSO 算法中, 如果设粒子的群体规模为 N , 则第 i ($i = 1, 2, \dots, N$) 个粒子的位置可表示为 x_i , 其个体极值记为 p_{Best_i} , 其速度用 v_i 表示, 群体的全局极值用 g_{Best} 表示. 所以任一粒子 i 将根据下式更新自己的速度和位置^[1]:

$$\begin{aligned} v_i(t+1) &= \\ wv_i(t) &+ c_1 r_1(t) (p_{\text{Best}_i}(t) - \\ x_i(t)) &+ c_2 r_2(t) (g_{\text{Best}}(t) - x_i(t)), \quad (2) \\ x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t+1). \quad (3) \end{aligned}$$

其中: c_1 和 c_2 为常数, 称为学习因子或加速系数, 通常取值为 2; r_1 和 r_2 是 $(0, 1)$ 上的随机数; w 是惯性权重.

每个粒子的个体极值按下式更新:

$$p_{\text{Best}_i}(t+1) =$$

$$\begin{cases} x_i(t+1), & x_i(t+1) < p_{\text{Best}_i}(t); \\ p_{\text{Best}_i}(t), & x_i(t+1) \geq p_{\text{Best}_i}(t). \end{cases} \quad (4)$$

所有粒子的全局极值按下式选取:

$$\begin{aligned} g_{\text{Best}}(t+1) &= \max(p_{\text{Best}_i}(t+1)), \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

每个粒子的速度 v_i 的值被限定在 $[-v_{\text{max}}, v_{\text{max}}]$ 内, v_{max} 的值通常取搜索空间的宽度. 惯性权重 w 的设置通常是从 0.9 线性减小到 0.2.

2.3 相关定义

MOP 和单目标优化问题是有本质区别的, 所以不能直接应用 PSO 算法来处理 MOP, 但可通过设计一些特殊的进化操作来指导搜索过程, 也可设计好的适应度排序策略加以实现. 为此本文首先给出如下定义:

设 x 为群体 S 中任一个体, $f_i(x(t))$ 是 x 在第 t 次迭代时对第 i 个目标函数的值.

定义 4 在某次迭代过程中, 若 x 对所有目标函数的值全部变优, 则称 x 为此次迭代过程中的全优个体. 由全体全优个体组成的群体称为全优子群体, 用 S_+ 表示, 即

$$\begin{aligned} f_i(x(t+1)) &< f_i(x(t)), \\ \forall i &\in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (6)$$

定义 5 在某次迭代过程中, 若 x 只对某一目标函数的值变优, 则称 x 为此次迭代过程中这一目标函数方向上的半优个体. 由全体半优个体组成的群体称为半优子群体, 用 S_k 表示, 即

$$\begin{aligned} f_k(x(t+1)) &< f_k(x(t)), \\ \exists k &\in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7)$$

定义 6 在某次迭代过程中, 若 x 对所有的目标函数的值全部变差, 则称 x 为此次迭代过程中的全劣个体. 由全体全劣个体组成的群体称为全劣子群体, 用 S_- 表示, 即

$$\begin{aligned} f_i(x(t+1)) &> f_i(x(t)), \\ \forall i &\in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (8)$$

定义 7 设 x 和 y 是群体中的任意两个个体, 称 x 支配 y 必须满足:

- 1) 对所有目标函数 x 不比 y 差, 即

$$f_i(x) \leq f_i(y), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (9)$$
- 2) 至少存在一个目标函数使 x 比 y 好, 即

$$f_k(x) < f_k(y), \quad \exists k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (10)$$

2.4 算法的提出

为尽可能得到或接近非劣最优解, 反映到目标函数空间, 要求粒子在非劣最优面上的分布尽可能均匀, 也就是算法必须保证在决策变量空间中解的多样性.

当然, 一个群体要想均匀地飞向非劣最优目标

域,不能只根据支配关系来判断解的优劣,否则很容易收敛到局部区域,难以保证解的多样性.因此本文提出用多个子群体的方法来保证整个群体的多个进化方向,而在子群体内部再判断个体间的支配关系.对两个目标函数的多目标问题而言,根据定义 4 ~ 6,在迭代过程中,可将一个进化群体分为 4 个子群体:全优子群体 S_+ , $f_1(x)$ 方向半优子群体 S_1 , $f_2(x)$ 方向半优子群体 S_2 和全劣子群体 S_- .

得到分类子群体后,根据定义 7 找出每个子群体中的全局最优个体,它们构成一个非支配集.在非支配集中的这些子群体全局最优个体将构成一个此次迭代的全局最优区域,只要算法能保证整个群体将飞向这个区域,那么由于该区域在迭代过程中的不断变化,它就可以涵盖整个非劣最优区域.因此,可从该支配集中选出用于更新整个粒子群体的全局最优解 g_{Best} ,显然它代表了所有可能好的飞行方向.

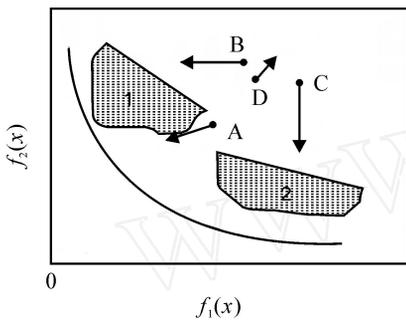


图 1 子群体及全局最优区域

以两个目标函数的多目标问题为例,如图 1 所示.区域 1 和 2 分别是某两次迭代后由 3 个子群体全局最优个体组成的目前好的区域,而整个群体将在全局最优解 g_{Best} 的指导下分别飞向这两个区域附近,进而由于最优区域的不变化,粒子最终会分散飞向非劣最优目标域.另外,整个群体在每次迭代后都要进行重分类,这可保证在子群体间交换个体的产生,使整个群体分布更均匀,避免局部最优的出现.对于每次迭代时产生的全劣个体,算法会将其抛弃后重新生成,进一步保证群体的多样性.各子群体间存在信息的交换,因此不能根据某一次的分类子群体而最终决定一个粒子的优劣,即每个粒子的原有特性也具有很高的参考价值,所以为了保证每个子群的原有特性,个体极值 p_{Best} 应选取子群体中个体的原有个体极值,以保证群体多样性不丢失.对于 S_- 中的粒子要全部重新随机生成,进一步保证粒子的搜索能力.

2.5 算法流程

下面以两目标函数优化为例给出算法流程:

Step1: Init() ;// 初始化粒子群,包括群体规模 N ,粒子的位置 x_i ,速度 v_i ;

Step2: Fitness1 $_i$ = $f_1(x_i)$, Fitness2 $_i$ = $f_2(x_i)$;// 计算对各个目标函数的适应度值;

Step3: BakFit1 = Fitness1, BakFit2 = Fitness2 ;// 备份适应度值;

Step4: p_{Best}_i = Optimum($f(x_i)$), g_{Best} = Optimum($f(x)$) ;// 以加权方式得到初始 p_{Best}_i 和 g_{Best} ;

Step5: x_i = Renewal(x_i) ;// 根据标准 PSO 算法更新粒子群;

Step6: Dividing_Swarm() ;// 根据定义 4 ~ 6 得到 4 个子群体;

Step7: Find_Best() ;// 根据定义 7 找到全局最优区,得到新的全局极值和个体极值并更新全劣子群体;

Step8: x_i = Renewal(x_i) 用 Step7 所得的 g_{Best} 和 p_{Best}_i ,更新每个粒子速度 v_i 和位置 x_i ;

Step9: 如果满足中止条件,则退出;否则返回 Step6.

3 数值实验

3.1 测试函数及相关参数设置

使用表 1 中的两个函数^[6,7]进行测试.对于 PSO 算法的参数,给定学习因子 $c_1 = c_2 = 0.5$;惯性权重从 0.9 线性减小到 0.2; V_{max} 为搜索空间的宽度,根据各目标函数的可行域,其取值也一同在表 1 中给出.

表 1 测试函数

序号	函 数	可行域	V_{max}
1	$\min f_1 = x^2$ $\min f_2 = (x - 2)^2$	$[-5, 7]$	± 12
2	$\min f_1(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ -2 + x, & 1 < x < 3 \\ 4 - x, & 3 < x < 4 \\ -4 + x, & x > 4 \end{cases}$ $\min f_2(x) = (x - 5)^2$	$[-5, 10]$	± 15

3.2 测试结果

测试函数 1:初始群体选取 100 个粒子,算法迭代 20 次后,100 个粒子全部是满足条件的解,且分布

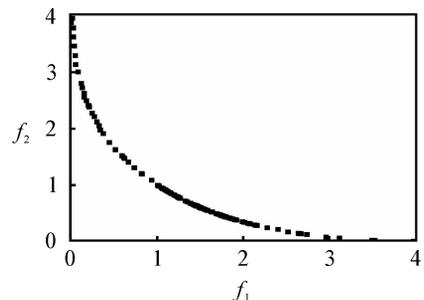


图 2 测试函数 1 所得 Pareto 曲线

非常均匀.由所有解绘制的 Pareto 曲线如图 2 所示.图 3 给出了各子群体中的个体数随迭代次数变化的情况.

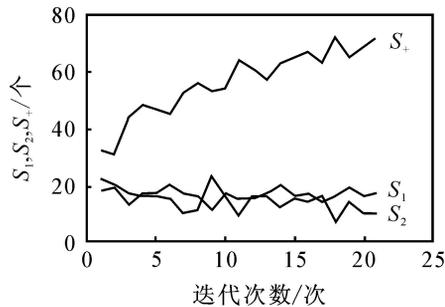


图3 测试函数1中子群体规模的变化曲线

测试函数2:初始群体选取100个粒子,算法迭代50次后,100个粒子全部是满足条件的解.由所有解绘制的 Pareto 曲线如图4所示.可以看出,形成了分布很均匀的非劣最优面.图5给出了各子群体中的个体数随迭代次数变化的情况.

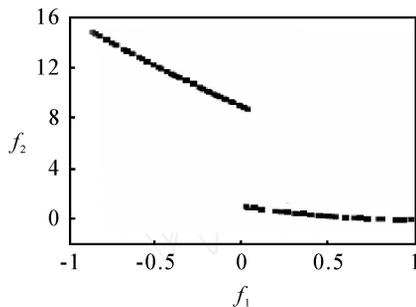


图4 测试函数2所得 Pareto 曲线

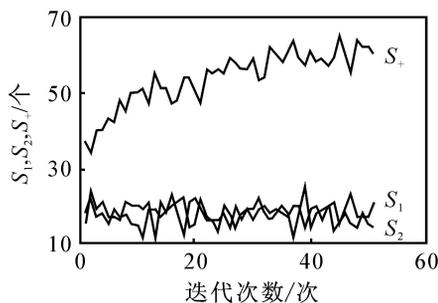


图5 测试函数2中子群体规模的变化曲线

3.3 结果分析

在目标函数空间中,非劣最优目标域是适应度值区域的边界,也就是有效界面.对实验中的二维最小化情况,有效界面应是适应度值的左下边界.由图2和图4可看出,两个测试函数都准确地给出了有效界面,算法都得到了完整的 Pareto 曲线.而且目标向量均匀准确地分布在有效界面上,全部初始粒子最终都全部均匀地分布在有效解集中,所用迭代次数非常少.

由图3和图5可明显看出,本文构造的子群体对解的多样性的影响,也可看出各子群体间存在的粒子交换行为.对于测试函数1, S_1 和 S_2 子群体的

数目维持在10~20个之间,虽有波动,但整体表现比较稳定,而迭代过程中 S_+ 子群体则呈现快速上升.显然, S_1 和 S_2 子群体的波动说明了子群体间的信息交换,同时 S_+ 子群体数目的上升体现了 S_+ 子群体中个体在不断减少,说明粒子的高速收敛过程.从迭代曲线分析可以看出,算法每次迭代都通过保持子群体的形态来保证解的多样性,并且有很快的收敛速度.对于测试函数2, S_1 和 S_2 子群体的平均数目维持在16个左右,并有上下波动.同测试函数1一样,从图中可以看出,在迭代50次后全劣个体基本不存在了,这时所有个体全部成为可行解,体现为 S_1 , S_2 , S_+ 子群体.当然这3个子群体间数目的变化及整体的变化趋势,表明了进化过程中不同的进化方向,进而保证了粒子在有效集中的分布,在目标函数空间中体现为 Pareto 曲线分布均匀准确.

4 结 语

本文算法根据 MOP 的特点,将一个进化群体在不同的子目标方向上分成了几个具有不同进化方向的子群体,并利用非劣支配的概念定义了个体间的支配关系,然后找出每个子群体中的最优非支配粒子组成一个非支配集.非支配集中的个体构成了一个全局最优区域,用以指导整个粒子群的进化.算法中群体在每次迭代后都要重新分类,以保证子群体间的信息交换,使整个群体分布更均匀,避免了局部最优,从而保证了解的多样性.该算法利用了 PSO 算法快速收敛的优点及全局极值和个体极值的导向作用,通过很少的迭代次数便可得到分布均匀的 Pareto 有效解集.数值实验表明了算法的有效性.对算法的收敛性分析是本文的进一步工作.

参考文献(References)

- [1] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization [C]. IEEE Int Conf on Neural Networks. Piscataway, 1995: 1942-1948.
- [2] Fieldsend J, Singh S. A multi-objective algorithm based upon particle swarm optimization, an efficient data structure and turbulence[C]. Proc of UK Workshop on Computational Intelligence. Birmingham, 2002: 37-44.
- [3] Coello C A, Lechuga M S. MOPSO: A proposal for multiple objective particle swarm optimization[C]. Proc of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Honolulu, 2002: 1051-1056.
- [4] Parsopoulos K E, Vrahatis M N. Particle swarm optimization method in multiobjective problems [C]. Proc of the ACM Symposium on Applied Computing. New York: ACM Press, 2002: 603-607.

(下转第1320页)

0.331 61,最大散布范围为 191.表 3 中数据表明,元胞蚂蚁算法的结果均优于文献[4]的结果,能很好地逼近 Pareto 的前沿.

表 3 编号 2 的函数与文献[4]中算法的比较

算法	迭代次数	解的个数	间距 s	最大散布范围 D
NSGA	10	97	0.85	115.44
文献[4]算法	10	238	0.37	142.59
本文算法	10	468	0.33	191

图 3 给出了编号 3 的测试函数在每个区域放 5 个蚂蚁且迭代 200 次后的求解结果.获得 Pareto 解的个数为 98 个,解的间距为 0.008 6,最大散布范围为 1.429 6.表 4 中数据表明,本文算法和文献[4]的结果较为接近,都能较好地逼近 Pareto 的前沿.

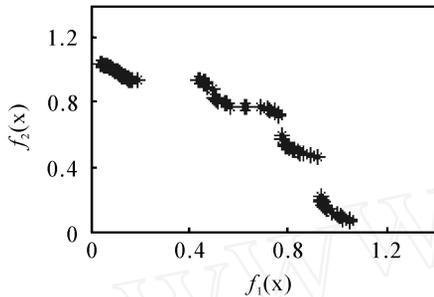


图 3 编号 3 函数的求解结果

表 4 编号 3 的函数与文献[4]中算法的比较

算法	迭代次数	解的个数	间距 s	最大散布范围 D
NSGA	100	78	0.007 8	1.21
文献[4]算法	100	136	0.005 1	1.41
本文算法	200	98	0.008 6	1.43

4 结 语

本文基于元胞自动机的区域演化规则,提出了用于求解多目标函数优化的元胞蚂蚁算法.将演化规则与信息素释放相结合,可更好地引导蚂蚁的行走方向.算例求解与测试结果表明,本文算法能很好地逼近 Pareto 前沿,同时具有一定的散布广度.

参考文献(References)

[1] Coello C A , Toscano Pulido G . Multiobjective

optimization using a micro-genetic algorithm[C]. Proc of the Genetic and Evolutionary Computation Conf. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001: 274-282.

[2] Mu Sheng-jing, Su Hong-ye, Wang Yue-xuan, et al. An efficient evolutionary multi-objective optimization algorithm [C]. Proc of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Canberra: IEEE Press, 2003: 914-920.

[3]王跃宣,刘连臣,牟盛静,等.处理带约束的多目标优化进化算法[J].清华大学学报,2005,45(1):103-106. (Wang Yue-xuan, Liu Lian-chen, Mu Sheng-jing, et al. Constrained multi-objective optimization evolutionary algorithm[J]. J of Tsinghua University, 2005, 45(1): 103-106.)

[4]张勇德,黄莎白.多目标优化问题的蚁群算法研究[J].控制与决策,2005,20(2):170-173. (Zhang Yong-de, Huang Sha-bai. On ant colony algorithm for solving multiobjective optimization problems[J]. Control and Decision, 2005, 20(2): 170-173.)

[5]Colormi A, Dorigo M, Maniezzo V. Distributed optimization by ant colonies [C]. Proc of the 1st European Conf on Artificial Life. Paris: Elsevier Publishing, 1991: 134-142.

[6] Von Neumann J, Burks A W. Theory of self-reproducing automata [M]. Urbana: University of Illinois Press, 1966.

[7] Wolfram S. Theory and application of cellular automata [M]. Singapore: The World Scientific Publishing Company Limited, 1986.

[8]《运筹学》教材编写组.运筹学[M].北京:清华大学出版社,2005:440-447.

(The Group of "Operations Research". Operations research [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 440-447.)

[9] Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results[J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 173-195.

(上接第 1316 页)

[5] Hu X, Eberhart R C. Multiobjective optimization using dynamic neighborhood particle swarm optimization[C]. Proc of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Honolulu, 2002: 1677-1681.

[6] Joanna L, Eiben A E. A multi-sexual genetic algorithm for multiobjective optimization[C]. Proc of the 1996 Int

Conf on Evolutionary Computation. Nagoya, 1996: 59-64.

[7] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results [R]. Zurich: Swiss Federal Institute of Technology, 1999.