

由平行平面的投影确定无穷远平面的单应矩阵*

孙凤梅^{1,2}, 吴福朝², 胡占义²⁺

¹(北方工业大学 基础学院,北京 100041)

²(中国科学院 自动化研究所 模式识别国家重点实验室,北京 100080)

Determination of the Infinite Homography Through Scene Parallel Planes

SUN Feng-Mei^{1,2}, WU Fu-Chao², HU Zhan-Yi²⁺

¹(College of Fundamental Research, North China University of Technology, Beijing 100041, China)

²(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-10-62616540, Fax: 86-10-62551993, E-mail: huzy@nlpr.ia.ac.cn

<http://www.ia.ac.cn/nlpr>

Received 2002-03-01; Accepted 2002-10-22

Sun FM, Wu FC, Hu ZY. Determination of the infinite homography through scene parallel planes. *Journal of Software*, 2003,14(5):936~946.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/936.htm>

Abstract: The homography induced by the plane at infinity between two images, namely the infinite homography, plays a very important role in 3D computer vision since many vision problems could be substantially simplified by knowing it. Unlike homographies induced by ordinary planes which can usually be determined by correspondences of image points, the infinite homography must be determined indirectly since no real physical points lie on the plane at infinity. In this paper, how to determine the infinite homography through scene parallel planes is studied, and the following two conclusions are proved: (1) If only a pair of parallel planes is present in the scene, the infinite homography can be obtained by solving a 4th order polynomial, and at maximum, four possible solutions exist. (2) If at least two pairs of parallel planes exist in the scene, and if planes in different pairs are not parallel, then the infinite homography can be linearly and uniquely determined. In addition, a geometric interpretation to the above results, and some practical algorithms are also provided. The proposed results in the paper are of interests in camera self-calibration and image based 3D reconstruction under both theoretical and practical standpoints.

Key words: infinite homography; fundamental matrix; camera's intrinsic parameter

摘要: 在三维计算机视觉中,无穷远平面的单应矩阵扮演了极其重要的角色,可使众多视觉问题的求解得到简化.主要讨论如何利用平行平面的投影来求解两个视点间的无穷远平面的单应矩阵,用代数方法构造性地证

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60033010, 60175009 (国家自然科学基金); the Multidisciplinary Research Program of the Chinese Academy of Sciences under Grant No.KJ CX1-07 (中国科学院重大交叉学科前沿资助项目)

第一作者简介: 孙凤梅(1956—),女,吉林长春人,讲师,主要研究领域为光学物理.

明了下述结论:(1) 如果场景中含有一组平行平面,则可以通过求解一个一元 4 次方程来确定两个视点间的无穷远平面对应的单应矩阵;(2) 如果场景中含有两组平行平面,则可以线性地确定两个视点间的无穷远平面对应的单应矩阵.并对上述结果给出了相应的几何解释和具体算法.所给出的结果在三维计算机视觉,特别是摄像机自标定中具有一定的理论意义和应用价值.

关键词: 无穷远平面的单应矩阵;基本矩阵;摄像机内参数

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

无穷远平面的单应矩阵在三维计算机视觉中扮演了极其重要的角色,可使众多的三维计算机视觉问题的求解得到简化.例如,对于摄像机自标定问题,在没有任何先验知识的情况下,自标定过程是一个非线性过程,对初值极其敏感,鲁棒性差.然而,如果已知无穷远平面的单应矩阵,则摄像机的自标定过程就变为线性过程^[1-3].又如,20 世纪 90 年代后期发展起来的分层重建技术,其重建过程也是非线性的^[4-6],但是一旦知道了无穷远平面的单应矩阵,重建过程就可以化为线性过程.因此,讨论求解无穷远平面的单应矩阵的方法具有重要的理论意义和实用价值.

由于无穷远平面在图像平面上的投影是未知的,所以我们无法像计算有限远平面的单应矩阵那样来求解无穷远平面的单应矩阵.那么,如何从图像求解无穷远平面的单应矩阵呢?如果对摄像机的运动信息或场景几何结构一无所知的话,我们不可能直接计算出无穷远平面的单应矩阵.在知道什么样的摄像机运动信息或场景包含什么样的几何结构时,我们就可以计算无穷远平面的单应矩阵呢?目前已知的是,如果摄像机运动是纯旋转运动或者两组一般的刚体运动有相同的旋转,就可以计算无穷远平面的单应矩阵^[1,6];对于场景几何结构,如果场景中包含 3 组非共面的平行直线,其中每两组之间不相互平行,则可以利用 3 个隐消点和对极点来计算无穷远平面的单应矩阵^[7].那么,是否还存在其他条件,能够计算出无穷远平面的单应矩阵呢?目前,我们还未见到相关文献.

本文旨在研究如何利用场景中平行平面的投影来求解无穷远平面的单应矩阵.第 1 节简要介绍关于基本矩阵和单应矩阵的基本概念.第 2 节主要讨论由平行平面求解无穷远平面单应矩阵的方法.第 3 节是有关几何解释.第 4 节给出求解无穷远平面单应矩阵的具体算法.第 5 节是模拟与真实图像的实验.最后是结束语.

为了方便阅读,本文对所使用的符号作如下规定:点及其坐标向量(列向量)用同一个小写黑体字母表示,如 x, y, z, \dots ;矩阵用大写黑体字母表示,如 X, Y, Z, \dots ;标量用小写字母表示,如 x, y, z, \dots .

1 基本矩阵与单应矩阵

1.1 五参数模型

在本文中假定摄像机模型为经典小孔模型,内参数矩阵可表示为

$$K = \begin{bmatrix} f_u & s & u \\ 0 & f_v & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中, (u, v) 为主点坐标, f_u 为图像 u 轴的尺度因子, f_v 为图像 v 轴的尺度因子, s 为畸变因子.

1.2 基本矩阵

摄像机做刚体运动 (R, t) ,运动前所摄的图像称为视点 1 下的图像,运动后所摄的图像称为视点 2 下的图像,分别记为 $I^{(1)}, I^{(2)}$.两图像间的基本矩阵是极几何的代数刻画.令 $e^{(1)} = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, 1)^T \in I^{(1)}$, $e^{(2)} = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, 1)^T \in I^{(2)}$ 是一对对极点,若对任意的一对图像匹配点 $m^{(1)} \in I^{(1)}$, $m^{(2)} \in I^{(2)}$, 矩阵 F 使得

$$Fm^{(1)} = \lambda e^{(2)} \times m^{(2)} \quad \text{或} \quad (m^{(2)})^T Fm^{(1)} = 0, \quad (1)$$

其中 λ 为非零常数因子,则称 F 为基本矩阵.基本矩阵仅与摄影机内参数和视点间的运动有关,而与场景信息无关,在相差一个非零常数因子的意义下是惟一的,可以表示为

$$F \approx K^{-T} [t]_{\times} R K^{-1}. \quad (2)$$

对于对极点 $e^{(1)}, e^{(2)}$, 我们有

$$e^{(1)} \approx K R^T t, \quad e^{(2)} \approx K t. \quad (3)$$

其中“ \approx ”表示在相差一个非零常数的意义下相等.由式(2)和式(3)不难推知基本矩阵具有下述性质:

$$\text{rank}(F) = 2, \quad F e^{(1)} = 0, \quad F^T e^{(2)} = 0. \quad (4)$$

给定 8 对以上的图像匹配点可以线性地计算基本矩阵^[8,9],从而由式(4)可以计算对极点.因此在本文中,我们假定基本矩阵和对极点均是已知的.

1.3 平面的单应矩阵

令 $m^{(1)} \in I^{(1)}, m^{(2)} \in I^{(2)}$ 分别是平面 π 上的点 x 在两个视点下的图像的齐次坐标,如果矩阵 H 使得

$$m^{(2)} \approx H m^{(1)}, \quad (5)$$

则称矩阵 H 为平面 π 关于两个视点间的单应矩阵(以下简称单应矩阵).单应矩阵在相差一个非零常数因子的意义下是惟一的,可表示为

$$H \approx K R K^{-1} + K \frac{t n^T}{d} K^{-1}, \quad (6)$$

其中 n 为平面 π 在视点 1 坐标系中的单位法向量, d 为视点 1 的坐标原点到平面 π 的距离.当 $d \rightarrow \infty$ 时,我们有

$$K R K^{-1} + K \frac{t n^T}{d} K^{-1} \rightarrow K R K^{-1}.$$

令

$$H_{\infty} \approx K R K^{-1}, \quad (7)$$

并称其为无穷远平面的单应矩阵.

当空间平面不通过两个视点(摄像机的光心)的任一视点时,单应矩阵是满秩的,即 $\text{rank}(H) = 3$.对于有限远平面,我们可以选取 4 对以上的图像匹配点,线性地计算出单应矩阵^[8].对于无穷远平面,由于它在图像平面上的投影是未知的,我们无法通过图像匹配点来计算它的单应矩阵.

在本文中,我们假定有限远平面的单应矩阵是已知的,并且是满秩的,即所考虑的平面不通过运动前后摄像机的任一光心.

2 由平行平面确定无穷远平面的单应矩阵

本节将用代数方法,给出由平行平面确定无穷远平面的单应矩阵的方法.

2.1 在相差一个非零常数因子的意义下确定向量 $a (= K^{-T} n)$

令 π_1, π_2 是空间中不相互重合的平行平面, $H^{(1)}, H^{(2)}$ 分别为相应的单应矩阵.由式(6)可知,存在非零常数 s_1, s_2 ,使得

$$s_1 H^{(1)} = K R K^{-1} + K \frac{t n^T}{d_1} K^{-1}, \quad (8.1)$$

$$s_2 H^{(2)} = K R K^{-1} + K \frac{t n^T}{d_2} K^{-1}. \quad (8.2)$$

由式(3)可知,存在非零常数 λ ,使得

$$e^{(2)} = \lambda K t. \quad (9)$$

令

$$a = K^{-T} n. \quad (10)$$

将式(9)、式(10)代入式(8.1)、式(8.2),并相减可得

$$s_1 \mathbf{H}^{(1)} - s_2 \mathbf{H}^{(2)} = \lambda \begin{pmatrix} d_1 - d_2 \\ d_1 d_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}^{(2)} \mathbf{a}^T. \quad (11)$$

于是有

$$\frac{s_1}{s_2} \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} \left(\frac{\lambda(d_2 - d_1)}{d_1 d_2 s_2} \mathbf{a} \right)^T = \mathbf{H}^{(2)}. \quad (12)$$

式(12)说明下述方程:

$$x \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} \mathbf{y}^T = \mathbf{H}^{(2)} \quad (13)$$

关于 (x, \mathbf{y}) 总有解:

$$x = \frac{s_1}{s_2}, \quad \mathbf{y} = \frac{\lambda(d_2 - d_1)}{d_1 d_2 s_2} \mathbf{a}. \quad (14)$$

如果能证明式(13)关于 (x, \mathbf{y}) 有惟一解,我们就可以通过求解式(13),在相差一个常数的意义下确定向量 \mathbf{a} .

命题 1. 式(13)关于 (x, \mathbf{y}) 有惟一解.

证明:将式(13)写成线性方程组的形式:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} h_{11}^{(1)} & e_1^{(2)} & 0 & 0 \\ h_{12}^{(1)} & 0 & e_1^{(2)} & 0 \\ h_{13}^{(1)} & 0 & 0 & e_1^{(2)} \\ h_{21}^{(1)} & e_2^{(2)} & 0 & 0 \\ h_{22}^{(1)} & 0 & e_2^{(2)} & 0 \\ h_{23}^{(1)} & 0 & 0 & e_2^{(2)} \\ h_{31}^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ h_{32}^{(1)} & 0 & 1 & 0 \\ h_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(2)} \\ h_{12}^{(2)} \\ h_{13}^{(2)} \\ h_{21}^{(2)} \\ h_{22}^{(2)} \\ h_{23}^{(2)} \\ h_{31}^{(2)} \\ h_{32}^{(2)} \\ h_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

从前面的分析得知式(15)是相容的,所以我们只需证明 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 4$.显然, $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ 线性无关,因此 $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq 3$.如果 $\text{rank}(\mathbf{A}) \neq 4$,则存在非零向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$,使得

$$\mathbf{a}_1 = c_1 \mathbf{a}_2 + c_2 \mathbf{a}_3 + c_3 \mathbf{a}_4.$$

于是

$$\begin{aligned} h_{11} &= c_1 e_1^{(2)}, h_{12} = c_2 e_1^{(2)}, h_{13} = c_3 e_1^{(2)}, h_{21} = c_1 e_2^{(2)}, h_{22} = c_2 e_2^{(2)}, h_{23} = c_3 e_2^{(2)}, \\ h_{31} &= c_1, h_{32} = c_2, h_{33} = c_3. \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{H}^{(1)} = (\mathbf{e}^{(2)}) \mathbf{c}^T.$$

这样, $\text{rank}(\mathbf{H}^{(1)}) = \text{rank}((\mathbf{e}^{(2)}) \mathbf{c}^T) = 1$,与 $\text{rank}(\mathbf{H}^{(1)}) = 3$ 矛盾.故 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 4$,所以式(15)关于 (x, \mathbf{y}) 有惟一解,亦即式(13)关于 (x, \mathbf{y}) 有惟一解. □

2.2 由模值相等约束确定无穷远平面的单应矩阵

令 $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ 是式(13)的解,则

$$\mathbf{y}^* = s \mathbf{K}^{-T} \mathbf{n}, \quad (16)$$

其中 s 为未知的非零常数.由式(16)、式(8.1)和式(9),我们有

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{1}{s_1} \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} + \frac{\lambda s}{s_1} \mathbf{e}^{(2)} (\mathbf{y}^*)^T, \quad (17)$$

因此

$$\mathbf{H}_\infty \approx \mathbf{H}^{(1)} - x\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^*)^T, \quad (18)$$

其中 x 为未知的非零常数.

下面根据模相等约束(即无穷远平面的单应矩阵的 3 个特征值有相同的模^[5])来确定式(18)中的未知常数 x .

通过直接计算,可知 $\mathbf{H}^{(1)} - x\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^*)^T$ 的特征多项式为

$$p(\lambda) = \text{Det}(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{H}^{(1)} - x\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^*)^T)) = \lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x), \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} a(x) &= x(\mathbf{e}^{(2)})^T \mathbf{y}^* - \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}), \\ b(x) &= x(\mathbf{e}^{(2)})^T (\mathbf{H}^{(1)} - \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)})\mathbf{I}) \mathbf{y}^* + \sum_{j=1}^3 \text{Det}(\mathbf{H}^{(1)}(j, j)), \\ c(x) &= x(\mathbf{e}^{(2)})^T (\mathbf{H}^{(1)})^* \mathbf{y}^* - \text{Det}(\mathbf{H}^{(1)}). \end{aligned}$$

这里, $\text{tr}(\mathbf{H}^{(1)})$ 表示矩阵的迹, $\mathbf{H}^{(1)}(j, j)$ 是 $\mathbf{H}^{(1)}$ 的对角元素 $h_{jj}^{(1)}$ 所对应的 2 阶子矩阵, $(\mathbf{H}^{(1)})^*$ 表示 $\mathbf{H}^{(1)}$ 的伴随矩阵. 根据模相等约束,我们得到下述方程:

$$[b(x)]^3 - c(x)[a(x)]^3 = 0. \quad (20)$$

由于 $a(x), b(x), c(x)$ 至多是 x 的一次式,所以式(20)至多是一个 4 次方程,因此它至多有 4 个解: $x_j, 1 \leq j \leq 4$.

令

$$\mathbf{H}(x_j) = \mathbf{H}^{(1)} - x_j \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^*)^T, 1 \leq j \leq 4, \quad (21)$$

则它包含了无穷远平面的单应矩阵的所有可能解.但并非每一个 $\mathbf{H}(x_j)$ 都是无穷远平面的单应矩阵.显然,当 $x_j=0$ 或者为复数时, $\mathbf{H}(x_j)$ 不可能是无穷远平面的单应矩阵.对于其他情况,可以根据下述命题来检验:

命题 2. 设 x_j 为非零实数.(1) 若 $\mathbf{H}(x_j)$ 有复特征值,则 $\mathbf{H}(x_j)$ 为无穷远平面的单应矩阵;(2) 若 $\mathbf{H}(x_j)$ 无复特征值,则 $\mathbf{H}(x_j)$ 为无穷远平面的单应矩阵的充要条件为 $\mathbf{H}(x_j)$ 所有特征值的模均相等且特征值的代数重数等于几何重数,即 $\mathbf{H}(x_j)$ 可对角化.

命题 2 的数学证明主要是利用“无穷远平面单应矩阵在相差一个常数因子的意义下与旋转矩阵相似”的事实来证明,但其具体证明过程复杂且冗长,本文从略.

注 1. 尽管我们由一组平行平面不能惟一确定无穷远平面的单应矩阵,但在实践中是很有价值的.例如,在摄像机自标定问题中,我们可先求出所有可能的无穷远平面的单应矩阵,再由这些单应矩阵分解出相应摄像机内参数与旋转运动参数,最后从这些解中寻找内参数的合理解(见本文第 5.2 节).

2.3 由两组平行平面线性确定无穷远平面的单应矩阵

上一节我们利用模值相等约束,由一组平行平面确定无穷远平面的单应矩阵,需要求解一个一元 4 次方程,其方法是非线性的,且解可能不惟一.本节将证明:通过两组平行平面,可线性地惟一确定无穷远平面的单应矩阵.

设 $\{\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}\}, \{\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}\}$ 是两组平行平面,组与组之间的平面不平行,令 $\{\mathbf{H}^{(11)}, \mathbf{H}^{(12)}\}, \{\mathbf{H}^{(21)}, \mathbf{H}^{(22)}\}$ 分别为相应的单应矩阵.由式(18)知

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\infty &\approx \mathbf{H}^{(11)} - x_1 \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T, \\ \mathbf{H}_\infty &\approx \mathbf{H}^{(21)} - x_2 \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{y}^{(11)}, \mathbf{y}^{(21)}$ 为线性无关的向量(因组与组之间的平面不相互平行), x_1, x_2 为未知的非零常数.于是,存在非零常数 s ,使得

$$\mathbf{H}^{(11)} - x_1 \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T = s(\mathbf{H}^{(21)} - x_2 \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T),$$

即

$$s\mathbf{H}^{(21)} - sx_2 \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T + x_1 \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T = \mathbf{H}^{(11)}.$$

上式说明下述关于 (x, y, z) 的式(22)总是相容的.

$$x\mathbf{H}^{(21)} - y\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T + z\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T = \mathbf{H}^{(11)}. \quad (22)$$

如果能够证明式(22)关于 (x, y, z) 有惟一解 $(x, y, z) = (x^*, y^*, z^*)$, 则我们可以通过求解线性式(22), 在相差一个常数因子的意义下惟一地确定无穷远平面的单应矩阵:

$$\mathbf{H}_\infty \approx \mathbf{H}^{(11)} - z^* \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T = x^* \mathbf{H}^{(21)} - y^* \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T. \quad (23)$$

命题 3. 式(22)关于 (x, y, z) 有惟一解.

证明:将式(22)写成线性方程组的形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} h_{11}^{(21)} & -e_1^{(2)}y_1^{(21)} & e_1^{(2)}y_1^{(11)} \\ h_{12}^{(21)} & -e_1^{(2)}y_2^{(21)} & e_1^{(2)}y_2^{(11)} \\ h_{13}^{(21)} & -e_1^{(2)}y_3^{(21)} & e_1^{(2)}y_3^{(11)} \\ h_{21}^{(21)} & -e_2^{(2)}y_1^{(21)} & e_2^{(2)}y_1^{(11)} \\ h_{22}^{(21)} & -e_2^{(2)}y_2^{(21)} & e_2^{(2)}y_2^{(11)} \\ h_{23}^{(21)} & -e_2^{(2)}y_3^{(21)} & e_2^{(2)}y_3^{(11)} \\ h_{31}^{(21)} & -y_1^{(21)} & y_1^{(11)} \\ h_{32}^{(21)} & -y_2^{(21)} & y_2^{(11)} \\ h_{33}^{(21)} & -y_3^{(21)} & y_3^{(11)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(11)} \\ h_{12}^{(11)} \\ h_{13}^{(11)} \\ h_{21}^{(11)} \\ h_{22}^{(11)} \\ h_{23}^{(11)} \\ h_{31}^{(11)} \\ h_{32}^{(11)} \\ h_{33}^{(11)} \end{pmatrix}.$$

我们只需证明 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$. 因 $\mathbf{y}^{(11)}, \mathbf{y}^{(21)}$ 为线性无关的向量, 所以 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关. 如果 $\text{rank}(\mathbf{A}) \neq 3$, 则存在非零向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$, 使得

$$\mathbf{a}_1 = c_1\mathbf{a}_2 + c_2\mathbf{a}_3.$$

于是

$$\mathbf{H}^{(21)} = -c_1\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T + c_2\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T.$$

这样, 必有

$$\text{rank}(\mathbf{H}^{(21)}) = \text{rank}(-c_1\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T + c_2\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T) \leq \text{rank}(-c_1\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T) + \text{rank}(c_2\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T) = 2,$$

与 $\text{rank}(\mathbf{H}^{(21)}) = 3$ 矛盾. 故式(24)关于 (x, y, z) 有惟一解, 亦即式(22)关于 (x, y, z) 有惟一解.

注 2. 当场景中包含两张平行平面和与平面平行的两条平行直线时, 利用平行直线的隐消点, 我们仍可惟一地线性地确定无穷远平面的单应矩阵, 见文献[7]中第 330 页.

3 上节有关结论的几何解释

3.1 $\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-T}\mathbf{n}$ 的几何意义

我们知道平面 π 的单应矩阵可表示为

$$s\mathbf{H} = \mathbf{H}_\infty + \frac{\lambda}{d}\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{a}^T,$$

其中, \mathbf{n} 为平面 π 在视点 1 坐标系中的单位法向量, d 为视点 1 的坐标原点到平面 π 的距离, s, λ 为非零常数. 令 \mathbf{l}_∞ 表示平面 π 与无穷远平面 π_∞ 的交线, 它在第 1, 2 视点下的像直线分别记为 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$, 则必有

$$\lambda_1\mathbf{l}_1^T = \mathbf{l}_2^T\mathbf{H}_\infty, \quad \lambda_2\mathbf{l}_1^T = \mathbf{l}_2^T\mathbf{H}.$$

于是有

$$s\lambda_2\mathbf{l}_1^T = s\mathbf{l}_2^T\mathbf{H} = \lambda_1\mathbf{l}_1^T + \frac{\lambda\mathbf{l}_2^T\mathbf{e}^{(2)}}{d}\mathbf{a}^T.$$

所以, $a^T = \sigma l_1^T$, 其中 $\sigma = \frac{(s\lambda_2 - \lambda_1)d}{\lambda_2^T e^{(2)}}$ 是非零常数, 即 $a \succ l_1$. 于是, 我们有下述命题 4.

命题 4. $a = K^{-T}n$ 是平面 π 与无穷远平面 π_∞ 的交线 l_∞ 在第 1 个视点下的像直线.

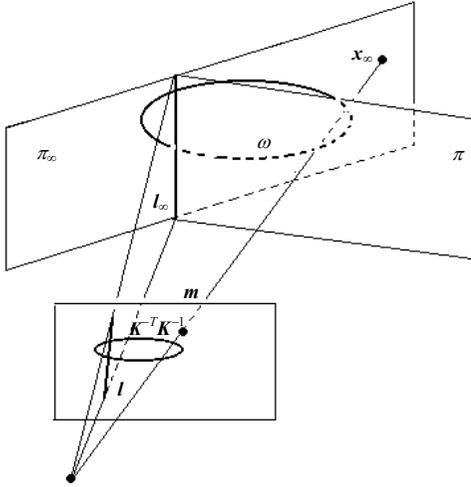


Fig.1 $a = K^{-T}n$ is the image of the intersection line l_∞ of plane π with infinite plane π_∞

图 1 $a = K^{-T}n$ 是平面 π 与无穷远平面 π_∞ 的交线 l_∞ 的像直线

命题 4 可用下述纯几何方法导入, 且不需要单应矩阵的概念, 只与第 1 视点相关联.

如图 1 所示, 令 π_∞ 是平面 π 法线与无穷远平面 π_∞ 的交点, 它在像平面上的投影为 m . 不难计算: 在无穷远平面上 $\pi_\infty = n$, 在像平面上 $m = Kn$ (这里, 平面上的点和线均用齐次坐标表示). 令 l_∞ 表示平面 π 与无穷远平面 π_∞ 的交线, 它的像直线记为 l . 显然, 在无穷远平面上也有 $l_\infty = n$. 这样, 我们必有 $l_\infty = l x_\infty$, 即 l_∞ 关于绝对二次曲线 $\omega = I$ 的极点为 x_∞ , 或者说 x_∞ 关于绝对二次曲线 $\omega = I$ 的极线为 l_∞ . 由于投影变换保持极点与极线的对应关系, 且绝对二次曲线 $\omega = I$ 的投影为像平面上的二次曲线 $K^{-T}K^{-1}$, 所以有

$$l = (K^{-T}K^{-1})m = K^{-T}n.$$

这样, 我们就用纯几何方法证明了命题 4.

3.2 平行平面求解 $a (= K^{-T}n)$ 的几何解释

命题 5. 令 π_1 与 π_2 是一对平行平面, 它们的单应矩阵分别记为 H_1, H_2 , 则 $a (= K^{-T}n)$ 是相关单应矩阵 $H_2^T H_1^{-T}$ 的一维特征子空间, 或者等价地说, 两平行平面的交线 (无穷远直线) 在第 1 幅图像上的投影直线是 $H_2^T H_1^{-T}$ 的一维特征子空间.

证明: 由于平面 π_2 与 π_1 平行, 所以存在常数 s, x_0 , 使得

$$H_2 = s(H_1 - x_0 e^{(2)} a^T),$$

于是

$$H_2^T H_1^{-T} = s(I - a \tilde{e}^{(1)T}),$$

其中 $\tilde{e}^{(1)} = x_0 H_1^{-1} e^{(2)} \approx e^{(1)}$. 对于矩阵 $s(I - \tilde{e}^{(1)} a^T)$, 由于 $\tilde{e}^{(1)} \neq 0, a \neq 0$, 我们可推知 (证明见附录):

- (1) 矩阵 $s(I - a \tilde{e}^{(1)T})$ 的特征值为 $s, s(1 - (\tilde{e}^{(1)})^T a)$, 其中 s 为二重特征值;
- (2) 矩阵 $s(I - a \tilde{e}^{(1)T})$ 关于特征值 $s, s(1 - (\tilde{e}^{(1)})^T a)$ 的特征子空间分别为

$$V_1 = \{x | x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3, e^T x = 0\},$$

$$V_{s(1 - (\tilde{e}^{(1)})^T a)} = \{\lambda a | \lambda \in R\}.$$

因此, $a (= K^{-T}n)$ 是相关单应矩阵 $H_2^T H_1^{-T}$ 的一维特征子空间, 或者等价地说, 两平行平面的交线 (无穷远直线) 在第 1 幅图像上的投影直线是 $H_2^T H_1^{-T}$ 的一维特征子空间. □

注 3. 上述证明过程实际上也给出了在相差一个非零常数的意义下求解 $a (= K^{-T}n)$ 的方法, 在实际应用中我们不提倡这种方法, 因为这种方法需要求解矩阵的逆, 众所周知, 当数据有噪声时, 矩阵的求逆是不稳定的.

注 4. 当 π_1, π_2 是一般位置上的两个平面时, 有类似的结论成立, 即 π_1, π_2 的交线在第 1 幅图像上的投影直线是 $H_2^T H_1^{-T}$ 的一维特征子空间.

3.3 惟一性的几何解释

令平面 π 在视点 1 坐标系中的单位法向量为 \mathbf{n} , 距坐标原点的距离为 d , 它的单应矩阵为 \mathbf{H} , 则 $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{H} - \mathbf{x}\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{a}^T$ 是共同一条无穷远直线的平面束(包括无穷远平面)的单应矩阵族, 该无穷远直线是平面 π 与无穷远平面 π_∞ 的交线.

由此可以看出, 利用一对平行平面在相差一个非零常数因子的意义下求出 $\mathbf{a}(=\mathbf{K}^T\mathbf{n})$ 后, 我们仍不能惟一确定无穷远平面的单应矩阵. 在第 2.2 节中, 我们利用模值约束, 试图确定无穷远平面的单应矩阵, 由于模值约束是非线性的, 因此仍会导致无穷远平面的单应矩阵至多可能有 4 个解. 在这些解中除了有一个是当前摄像机在当前视点下的无穷远平面的单应矩阵以外, 其他均是(当前摄像机在当前视点下的)有限远平面的单应矩阵, 这些有限远平面均与平面 π 平行. 由于确实存在当前摄像机在当前视点下的有限远平面的单应矩阵, 可以作为另一摄像机在另外视点下的无穷远平面的单应矩阵(见第 5.1 节). 因此, 在摄像机内参数未知的情况下, 如果不存在其他可以利用的信息, 这些解都是合理的. 换句话说, 此时, 我们无法惟一确定当前摄像机在当前视点下的无穷远平面的单应矩阵.

注 5. 由于模值约束是无穷远平面的一种代数性质, 目前我们还无法从几何上来说明为什么在模值约束下无穷远平面的单应矩阵至多有 4 个解.

在第 2.3 节中, 我们证明了通过两对平行平面可以惟一地确定无穷远平面的单应矩阵, 它有明显的几何解释: $\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) \approx \mathbf{H}^{(11)} - x_1\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T$ 是共无穷远直线 l_∞^1 (无穷远平面与平面 $\pi^{(11)}$ 的交线)的平面束的单应矩阵族; $\mathbf{H}(\mathbf{x}_2) \approx \mathbf{H}^{(21)} - x_2\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T$ 是共另一无穷远直线 l_∞^2 (无穷远平面与平面 $\pi^{(21)}$ 的交线)的平面束的单应矩阵族. 而同时通过无穷远直线 l_∞^1 和 l_∞^2 的平面有且仅有一张平面, 它是无穷远平面. 于是, 方程:

$$\mathbf{x}\mathbf{H}^{(21)} - \mathbf{y}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(21)})^T + \mathbf{z}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(11)})^T = \mathbf{H}^{(11)}$$

有且仅有惟一解, 因此我们可以惟一地确定无穷远平面的单应矩阵.

4 算法

综合前两节的讨论, 我们有下述算法:

算法 1. 一组平行平面的情况.

设 π_1, π_2 是空间中不相互重合的平行平面, 求无穷远平面的单应矩阵 \mathbf{H}_∞ :

- (1) 求解基本矩阵, 利用基本矩阵求视点 2 的图像上的极点 $\mathbf{e}^{(2)}$;
- (2) 利用 π_1, π_2 的投影, 求平面 π_1, π_2 的单应矩阵 $\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)}$;
- (3) 求线性方程 $\mathbf{x}\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)}\mathbf{y}^T = \mathbf{H}^{(2)}$ 的解: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$;
- (4) 计算 $\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{x}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^*)^T$ 的特征多项式 $p(\lambda) = \lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)$, 建立一元 4 次方程 $[b(x)]^3 - c(x)[a(x)]^3 = 0$, 并求解: $x = x_j, 1 \leq j \leq 4$;
- (5) 从 $\mathbf{H}(\mathbf{x}_j) = \mathbf{H}^{(1)} - x_j\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^*)^T (1 \leq j \leq 4)$ 中检验出无穷远平面的单应矩阵 \mathbf{H}_∞ (可能有多个解).

算法 2. 两组平行平面的情况.

设 $\{\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}\}, \{\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}\}$ 是两组不重合的平行平面, 求无穷远平面的单应矩阵 \mathbf{H}_∞ :

- (1) 解基本矩阵, 利用基本矩阵求视点 2 的图像上的极点 $\mathbf{e}^{(2)}$;
- (2) 利用 $\{\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}\}, \{\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}\}$ 的投影, 求它们的单应矩阵 $\{\mathbf{H}^{(11)}, \mathbf{H}^{(12)}\}, \{\mathbf{H}^{(21)}, \mathbf{H}^{(22)}\}$;
- (3) 求线性方程 $\mathbf{x}\mathbf{H}^{(j1)} + \mathbf{e}^{(2)}\mathbf{y}^T = \mathbf{H}^{(j2)}$ 的解: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)}), j = 1, 2$;
- (4) 求线性方程 $\mathbf{x}\mathbf{H}^{(21)} - \mathbf{y}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(2)})^T + \mathbf{z}\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(1)})^T = \mathbf{H}^{(11)}$ 的解: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$;
- (5) $\mathbf{H}_\infty \approx \mathbf{H}^{(11)} - \mathbf{z}^*\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(1)})^T = \mathbf{x}^*\mathbf{H}^{(21)} - \mathbf{y}^*\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{y}^{(2)})^T$.

注 6. 当数据存在噪声时, 上述算法中所有线性方程的解均为它的最小二乘解.

5 实验结果

在本节实验中,摄像机使用四参数模型(即畸变因子等于 0):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u \\ 0 & f_v & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这主要是基于以下两点考虑:

(1) 在四参数模型下,用文献[6]所给出的方法,无穷远平面的单应矩阵能惟一分解出相应的摄像机内参数和旋转运动参数,这有助于算法 1 的多解性分析;

(2) 对于实际数字摄像机,畸变因子都非常小,可以忽略不计,因此四参数模型能够满足实际应用的要求。

由于在理论上我们已经证明了算法 2 可惟一确定无穷远平面的单应矩阵,因此它可以直接应用于三维计算机视觉中的相关问题,如摄像机的自标定、3D 重构等.在本节中,我们对算法 1 进行实验,即算法 1 关于无穷远平面的单应矩阵的多解性以及摄像机自标定中的应用。

5.1 模拟实验

模拟实验的目的在于验证无穷远平面的单应矩阵的多解性.实验中随机给定摄像机内参数矩阵的理论值 \mathbf{K} 和摄像机运动的参数 (\mathbf{R}, \mathbf{t}) ,并随机给定两张平行平面,实验采用的具体参数如下:

摄像机内参数的理论值: $f_u = 600, f_v = 500, u = 8, v = 10$;

运动参数:平移向量: $(1, 1, 1)^T$;

旋转轴: $(0.1569, -0.8552, 0.4938)^T$,旋转角:1.0617(弧度);

平行平面: $\pi_1: n_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^T, d_1 = 20\sqrt{3}, \pi_2: n_2 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^T, d_2 = 30\sqrt{3}$.

根据算法 1 求解无穷远平面单应矩阵所有可能解;对每个解,根据文献[6]的方法,分解出所对应的摄像机内参数矩阵以及相应的摄像机运动旋转参数(此时我们只能分析旋转参数,因为无穷远平面的单应矩阵仅与旋转参数有关而与平移参数无关);将分解所得到的摄像机内参数矩阵与理论值进行比较,确定无穷远平面单应矩阵的真解。

我们在第 2.2 节中曾经指出,由一组平行平面的投影至多可能得到 4 个无穷远平面的单应矩阵的解,但大量模拟实验表明至多有两个解,一个是真解,另一个是伪解(即它对应于不同的摄像机在不同视点下的无穷远平面的单应矩阵),我们并没有发现有 4 解的具体例子.关于 4 解能否达到,目前我们还无法从实验中得到证实,也不能从理论上给出证明.表 1 是实验中的一个例子.从表中可以看出,所分解出的真解非常接近理论值。

Table 1 The infinite homography and camera's intrinsic parameters obtained from simulation

表 1 模拟实验所得到的无穷远平面的单应矩阵和摄像机参数

	Infinite homography	Camera's intrinsic parameters	Camera's rotation parameters
Unreasonable solution	$\begin{pmatrix} 0.4905 & 0.4291 & 468.622 \\ -0.4284 & 0.8553 & -38.731 \\ -0.0011 & -0.0007 & 0.6288 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 599.99 & 0 & 7.99 \\ 0 & 499.99 & 10.00 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Rotation axis: $(0.1569, -0.8552, 0.4938)^T$ Rotation angle: 1.0617 rad
Reasonable solution	$\begin{pmatrix} 0.8514 & 0.8906 & 645.266 \\ 0.0234 & 1.1544 & 186.117 \\ -0.0002 & 0.0003 & 0.9445 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1752.47 & 0 & 359.66 \\ 0 & 359.66 & 260.82 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Rotation axis: $(0.0000, 1.0000, 0.0000)^T$ Rotation angle: 0.2229 rad

5.2 真实图像实验

本节通过真实图像的实验来验证本文提出的算法在摄像机自标定中的可行性.图 2 是同一摄像机拍摄的兩幅图像,在拍摄过程中摄像机的内参数保持不变,图像大小为 1280×960 像素.真实场景中包含一对平行平面(上下方盒的正面)。



Fig.2 Two images used for camera calibration

图 2 用于摄像机自标定的两幅图像

由算法 1 计算无穷远平面的单应矩阵的所有可能的解,再对每一个解分解出相应的摄像机内参数,计算结果见表 2.考虑到实际摄像机的主点距图像中心都只有较小的偏移,而 K_1 的主点距图像中心有非常大的偏移,很显然这是不合理的,因此实际摄像机的内参数矩阵应该是 K_2 .

Table 2 Camera calibration result, $K=K_2$ is the correct solution

表 2 摄像机内参数标定结果, $K=K_2$ 是合理解

	Infinite homography	Camera's intrinsic parameters
Unreasonable solution	$H_{\infty 1} = \begin{pmatrix} 0.9975 & 0.3797 & 1007.1 \\ 0.0865 & 1.0512 & 689.52 \\ -0.00002 & 0.0004 & 0.9964 \end{pmatrix}$	$K_1 = \begin{pmatrix} 1398.75 & 0 & -1546.34 \\ 0 & 355.86 & -1094.28 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Reasonable solution	$H_{\infty 2} = \begin{pmatrix} 0.8846 & 0.1432 & 691.79 \\ -0.2592 & 0.9574 & 271.26 \\ -0.00023 & -0.000136 & 0.9013 \end{pmatrix}$	$K_2 = \begin{pmatrix} 1645.81 & 0 & 31.31 \\ 0 & 1749.79 & 8.98 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

为了表明所标定出的内参数 K_2 是合理的,我们使用文献[11]中介绍的基于平面模板的方法对摄像机重新进行标定,所得到的结果是

$$K = \begin{pmatrix} 1639.52 & 0 & 24.04 \\ 0 & 1740.76 & 20.82 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

它与 K_2 基本上是一致的,这表明本文提出的算法 1 可应用于摄像机自标定问题.

6 结束语

本文讨论了如何利用场景平行平面的投影来求解无穷远平面的单应矩阵,并得到了如下结论:(1) 如果场景中含有一组平行平面,则可以通过求解一个一元 4 次方程来确定无穷远平面的单应矩阵;(2) 如果场景中含有两组平行平面,则可以线性地确定无穷远平面的单应矩阵.这些结果在三维计算机视觉中具有一定的理论意义和应用价值.

References:

- [1] Zeller C, Faugeras O. Camera self-calibration from video sequences: The Kruppa equations revisited. INRIA Rapport de Recherche No.2793, 1996.
- [2] Hartley RI. Self-Calibration of stationary cameras. International Journal of Computer Vision, 1997,22(1):5~23.
- [3] Pollefeys M, Gool VL, Proesmans M, Euclidean 3D reconstruction from image sequences with variable focal lengths. In: Proceedings of the European Conference on Computer Vision. LNCS1064/5, Springer-Verlag, 1996. 31~42.
- [4] Pollefeys M, Koch R, Gool VL. Self-Calibration and metric reconstruction in spite of varying and unknown internal camera parameters. In: Proceedings of the International Conference on Computer Vision. Bombay, 1998. 90~95.
- [5] Koch R, Pollefeys M, Gool VL. Multi viewpoint stereo from uncalibrated video sequences. In: Proceedings of the European Conference on Computer Vision. NLCS 1409, Springer-Verlag. 1998. 55~71.

- [6] Wu FC, Hu ZY. A new theory and algorithm of linear camera self calibration. Chinese Journal of Computers, 2001,24(11): 1121~1135 (in Chinese with English abstract).
- [7] Hartley R, Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge University Press, 2000.
- [8] Luong Q-T, Faugeras OD. The fundamental matrix: Theory, algorithms, and stability analysis. International Journal of Computer Vision, 1996,17(1):43~76.
- [9] Hartley RI. In defense of the 8-point algorithm. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997,19(6): 580~593.
- [10] Ma SD, Zhang ZY. Computer Vision: Computational Theory and Algorithmic Basis. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese).
- [11] Zhang ZY. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. In: Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV'99) 1999. 666~673. <http://research.microsoft.com/~zhang>.

附中文参考文献:

- [6] 吴福朝,胡占义.摄像机自定标的线性理论与算法,计算机学报,2001,24(11):1121~1135.
- [10] 马颂德,张正友.计算机视觉——计算理论与算法基础.北京:科学出版社,1998.

附录. 矩阵 $I - ea^T$ 的特征值与特征子空间.

命题. 令 $e = (e_1, e_2, e_3)^T$, $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ 是两个非零的三维列向量,则:

- (1) 矩阵 $I - ae^T$ 的特征值为 $1, 1 - e^T a$, 其中 1 为二重特征值;
 (2) 矩阵 $I - ae^T$ 关于特征值 $1, 1 - e^T a$ 的特征子空间分别为

$$V_1 = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3, e^T x = 0\},$$

$$V_{1-e^T a} = \{\lambda a \mid \lambda \in R\}.$$

证明:(1) 因为

$$\lambda I - (I - ae^T) = \begin{pmatrix} (\lambda - 1) + a_1 e_1 & a_1 e_2 & a_1 e_3 \\ a_2 e_1 & (\lambda - 1) + a_2 e_2 & a_2 e_3 \\ a_3 e_1 & a_3 e_2 & (\lambda - 1) + a_3 e_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Det}(\lambda I - (I - ae^T)) = (\lambda - 1)^2 ((\lambda - 1) + e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - (1 - e^T a)),$$

所以, $1, 1 - e^T a$ 为矩阵 $I - ae^T$ 的特征值, 其中 1 为二重特征值.

(2) 因 $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ 为非零向量, 所以从 $ae^T x = 0$ 必有 $e^T x = 0$, 因此 $I - ae^T$ 关于特征值 1 的特征子空间为

$$V_1 = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3, e^T x = 0\}.$$

因为

$$[(1 - e^T a)I - (I - ae^T)]a = -(e^T a I - ae^T)a = ((a^T e) - (e^T a))a = 0,$$

所以, 矩阵 $I - ae^T$ 关于特征值 $1 - e^T a$ 的特征子空间为

$$V_{1-e^T a} = \{\lambda a \mid \lambda \in R\}.$$

□