

基于后件直联型分层的广义混合模糊系统及其积分模逼近

王贵君¹, 宋巍巍¹, 韩权杰²

(1. 天津师范大学 数学科学学院, 天津 300387; 2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘要: 首先, 引入后件直联型分层方法及其推理规则, 以对广义混合模糊系统的输入变量实施分层, 获得分层广义混合模糊系统的输入输出表达式和推理规则数的计算公式; 然后, 基于 K -积分模(度量)和分片线性函数证明分层后广义混合模糊系统对一类可积函数具有逼近性; 最后, 通过模拟实例给出后件直联型分层广义混合模糊系统对可积函数的逼近过程. 模拟结果表明, 所提出的方法不仅能使原系统模糊规则总数大大减少, 而且能使分层后系统仍具有逼近性.

关键词: 后件直联型分层; 广义混合模糊系统; 分片线性函数; K -积分模; 逼近性

中图分类号: TP183; O159

文献标志码: A

Generalized hybrid fuzzy system based on consequent direct link type hierarchy and its integral norm approximation

WANG Gui-jun¹, SONG Wei-wei¹, HAN Quan-jie²

(1. School of Mathematics Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China; 2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China. Correspondent: WANG Gui-jun, E-mail: tjwgj@126.com)

Abstract: The methods of the consequent direct link type hierarchy and its inference rules are introduced, so that implement hierarchy for some input variables of the generalized hybrid fuzzy system. Consequently, the input and output expressions of the generalized hybrid fuzzy systems after hierarchy and the calculation formula of the total number of fuzzy rules are obtained. Then, based on the K -integral norm(a metric) and a piecewise linear function, it is proved that the generalized hybrid fuzzy system after hierarchy has the approximation to a class of integrable functions. Finally, the approximation process of the consequent direct link type hierarchy generalized hybrid fuzzy systems to the integrable functions are given by an example. The results show that the hierarchical method can not only make the total number of fuzzy rules of the original system greatly reduced, but also make the system after hierarchy has keep the approximation.

Keywords: consequent direct link type hierarchy; generalized hybrid fuzzy system; piecewise linear function; K -integral norm; approximation

0 引言

模糊系统是输入-输出和状态变量定义在模糊集上的系统, 其核心是由 IF-THEN 规则所组成的知识库. 随着输入变量的增加, 其规则总数通常呈指数规律增长, 容易引起系统内部发生突变, 进而导致规则爆炸现象. Raju 等^[1-2]通过对高维系统实施低维模糊单元分层来连接整个系统, 该分层方法虽然在一定程度上降低了规则总数, 但同时也引发了其他问题. 例如, 导致系统内部结构复杂, 辨识参数增多, 中间变量没有明确含义等; Wang^[3-4]提出了串联叠加型分层方

法, 但该方法对被逼近函数和分层后代系统要求满足可微性(条件过高); Liu 等^[5]率先指出文献[3]对分层后代系统附加了错误条件, 并针对 T-S 模糊系统重新引入串联-叠加分层方法, 给出分层后该系统输入输出表达式和规则计算公式^[6], 从而可局部缓解或避免规则爆炸现象; 张香燕等^[7]引入二叉树分层方法对 T-S 模糊系统进行新的分层, 继而研究了分层后系统的逼近性, 但并未涉及降低规则数问题. 此后, 侧重于各类系统的不同分层所产生的等效性和算法问题有了诸多研究成果^[8-10]. 文献[11]将 Mamdani 和 T-S

收稿日期: 2014-07-06; 修回日期: 2014-09-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374009).

作者简介: 王贵君(1962—), 男, 教授, 从事模糊测度与积分、模糊神经网络与模糊系统逼近等研究; 宋巍巍(1990—), 女, 硕士生, 从事模糊系统分析的研究.

模糊系统统一起来建立了广义分层混合模糊系统; 文献[12]通过引入二叉树分层方法对该系统实施分层, 获得了规则总数的大幅度降低; 文献[13]引入 K -积分模为度量, 研究了广义 Mamdani 模糊系统对一类可积函数的逼近性及其实现过程. 这些结果不仅能够有效地应用于大型系统的模糊控制, 而且能够有效缓解或降低迅速增大的推理规则总数.

文献[14]将分层间中间变量直接作为各层模糊单元输出调节项提出后件直联型分层方法, 该分层方法虽有优点, 但对被逼近函数限制条件过高(要求可微), 这是由于证明逼近性用到多元函数泰勒公式的缘故. 本文依照文献[14]提出后件直联型分层方法, 对广义混合模糊系统实施重新分层, 并在混合推理规

则意义下获得分层后混合系统的输入输出表达式和规则数计算公式. 此外, 通过 K -积分模和分片线性函数证明基于该分层的广义混合模糊系统对一类可积函数仍具有逼近性.

1 后件直联型分层广义混合模糊系统

近年来, 关于对一般模糊系统的分层及其逼近性研究已有诸多成果, 参见文献[5-12]. 朱晓东等^[14]对多输入-单输出 T-S 模糊系统提出了一种后件直联型分层方法, 该分层方法主要是依据双输入-单输出模糊单元规则串接而成, 其输入输出结构如图1所示, 其中 $H_1, H_2, \dots, H_{L-1}$ 分别表示对输入变量实施分层后的每层模糊单元.

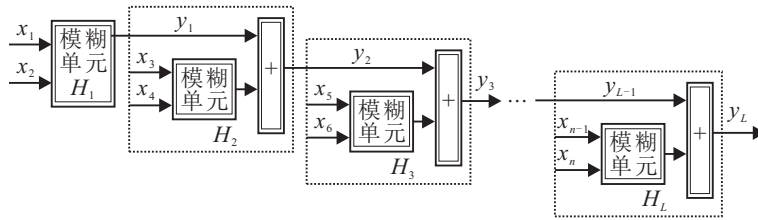


图1 后件直联型分层示意图

注1 设系统输入变量为 $x_1, x_2, \dots, x_d$. 若 d 为偶数, 则按上述后件直联型分层方法最后无剩余; 若 d 为奇数, 则最后一个变量 x_d 被剩余, 此时添加一个0值输入即可. 因此, 为了方便起见, 本文统一约定 d 为偶数, 后文不再另作说明.

定义1 设 d 维输入论域 $X = [-a, a]^d$ ($a > 0$). 给定 $m \in \mathbf{N}$, 若对 $\mathbf{R}$ 上每个单值论域 $X_i = [-a, a]$ ($i = 1, 2, \dots, d$) 作 $2m$ 等距剖分: $-1 = a_i^{-m} < a_i^{-m+1} < \dots < a_i^{-1} < 0 < a_i^1 < \dots < a_i^{m-1} < a_i^m = 1$, 其分点为 $a_i^j = j/m$, $i = 1, 2, \dots, d$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$. 若以每个分点 a_i^j 为峰点(隶属度为1的点)构造一族模糊数 $\{\tilde{A}_i^j\} \subset F(\mathbf{R})$, 则称模糊数组 $\{\tilde{A}_i^j | j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$ 为 X_i 上一个等距模糊剖分.

显然, 等距剖分仅依赖于 m , 从而必导致模糊剖分不唯一. 通常可选取三角形或梯形模糊数为模糊剖分, 并用符号 $\tilde{E}_a(d, m) = \{\tilde{A}_i^j | i = 1, 2, \dots, d, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$ 表示论域 $X_1, X_2, \dots, X_d$ 上所有等距模糊剖分构成的集合.

参见图1, 在后件直联型分层意义下对任意调节参数 $\lambda \in [0, 1]$ 及 $\forall \alpha \geq 0$, 给出基于后件直联型分层的混合模糊推理规则如下:

第1层. 若 x_1 是 $\tilde{A}_{1p_1}$, x_2 是 $\tilde{A}_{2p_2}$, 则 y_1 是

$$\lambda \tilde{W}_{r_1(p_1, p_2)} + (1 - \lambda) \tilde{V}_{t_1(x_1, x_2, p_1, p_2)}.$$

第2层. 若 x_3 是 $\tilde{A}_{3p_3}$, x_4 是 $\tilde{A}_{4p_4}$, 则 y_2 是

$$\lambda \tilde{W}_{r_2(p_3, p_4)} + (1 - \lambda) \tilde{V}_{t_2(x_3, x_4, p_3, p_4)} + b_2^3 y_1.$$

⋮

第 k 层. 若 x_{2k-1} 是 $\tilde{A}_{2k-1p_{2k-1}}$, x_{2k} 是 $\tilde{A}_{2kp_{2k}}$, 则 y_k 是

$$\lambda \tilde{W}_{r_k(p_{2k-1}, p_{2k})} + (1 - \lambda) \tilde{V}_{t_k(x_{2k-1}, x_{2k}, p_{2k-1}, p_{2k})} + b_k^3 y_{k-1}.$$

⋮

第 L 层. 若 x_{2L-1} 是 $\tilde{A}_{2L-1p_{2L-1}}$, x_{2L} 是 $\tilde{A}_{2Lp_{2L}}$, 则 y_L 是

$$\lambda \tilde{W}_{r_L(p_{2L-1}, p_{2L})} + (1 - \lambda) \tilde{V}_{t_L(x_{2L-1}, x_{2L}, p_{2L-1}, p_{2L})} + b_L^3 y_{L-1}.$$

其中: $\tilde{V}_{t_k}(x)$ 为单点模糊集; b_k^3 ($k = 2, 3, \dots, L$) 为调节参数; 指标变量 $p_1, p_2, \dots, p_{2L} = -m, -m+1, \dots, 0, \dots, m-1, m$; $t_k(\cdot)$ 为调节函数, $k = 1, 2, \dots, L$, 且 $t_k|_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$; $\tilde{W}_{r_j}$ 为输出变量, 其论域为 $[-b_j, b_j]$ ($b_j > 0$), $j = 1, 2, \dots, L$, b_j 为调节参数. 设

$$\begin{cases} t_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = y_1^{p_1, p_2} = \\ a_{10}^{p_1, p_2} + a_{11}^{p_1, p_2} x_1 + a_{12}^{p_1, p_2} x_2; \\ \vdots \\ t_k(x_{2k-1}, x_{2k}, p_{2k-1}, p_{2k}) = y_k^{p_{2k-1}, p_{2k}} = \\ a_{k0}^{p_{2k-1}, p_{2k}} + a_{k1}^{p_{2k-1}, p_{2k}} x_{2k-1} + a_{k2}^{p_{2k-1}, p_{2k}} x_{2k}; \\ \vdots \\ t_L(x_{2L-1}, x_{2L}, p_{2L-1}, p_{2L}) = y_L^{p_{2L-1}, p_{2L}} = \\ a_{L0}^{p_{2L-1}, p_{2L}} + a_{L1}^{p_{2L-1}, p_{2L}} x_{2L-1} + a_{L2}^{p_{2L-1}, p_{2L}} x_{2L}. \end{cases}$$

注 2 上述推理规则是利用文献[14]分层思想重新给出的广义混合模糊推理规则, 该推理规则与文献[12]中基于二叉树型混合推理模糊规则有着本质的不同. 这是因为广义混合推理规则中的中间变量 $y_2, y_3, \dots, y_{L-1}$ 既不出现在模糊规则前件中, 也不作为规则后件部分, 而是直接作用于模糊单元的输出结果, 换言之, $y_2, y_3, \dots, y_{L-1}$ 只作为中间项, 而不作为输入项.

特别地, 当 $\lambda = 0$ 时, 该广义混合模糊系统将退化为文献[14]中的后件直联型 T-S 分层模糊系统; 而当 $\lambda = 1$ 时, 可以重新定义一种后件直联型的 Mamdani 分层模糊系统. 此外, $\forall \lambda \in (0, 1)$, 采用单点模糊化、乘积推理机和中心平均解模糊化时, 对于输入变量 $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in [-a, a]^d$, 由文献[11-12]得到多输入单输出广义混合模糊系统的数学表达式为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \frac{\sum_{p_1, p_2, \dots, p_d = -m}^m \prod_{j=1}^d \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\sum_{p_1, p_2, \dots, p_d = -m}^m \prod_{j=1}^d \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} \left(\prod_{j=1}^d \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \times \left(\lambda \frac{b \cdot r(p_1, \dots, p_d)}{Q_d(r)} + (1 - \lambda) \sum_{i=0}^d b_{i; p_1, p_2, \dots, p_d} x_i \right) \right). \quad (1)$$

式(1)中符号说明参见文献[11-12].

事实上, 模糊系统的本质就是输入与输出之间的映射关系(一种插值器), 最常见的是 Mamdani 和 T-S 模糊系统. 文献[11]通过引入调节参数 $\lambda \in [0, 1]$ 将两个模糊系统统一起来, 建立了上述广义混合模糊系统式(1), 并采用文献[6]的分层方法获得规则总数计算公式, 但其规则数缩减程度并不令人满意.

下面依据注 1 的假设, 令 $d = 2L$. 此时, 若对广义混合模糊系统(1)实施后件直联型分层, 则第 1 层模糊单元的输出表达式为

$$y_1 = \frac{\sum_{p_1, p_2 = -m}^m \left(\lambda \frac{b_1 r_1(p_1, p_2)}{Q_d(r_1)} + (1 - \lambda) y_1^{p_1, p_2} \right) \prod_{j=1}^2 \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\sum_{p_1, p_2 = -m}^m \prod_{j=1}^2 \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}. \quad (2)$$

依次类推, 第 k 层模糊单元的输出为

$$y_k = \frac{\sum_{p_{2k-1}, p_{2k} = -m}^m \prod_{j=2k-1}^{2k} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\sum_{p_{2k-1}, p_{2k} = -m}^m \prod_{j=2k-1}^{2k} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} \left(\left(\lambda \frac{b_k r_k(p_{2k-1}, p_{2k})}{Q_d(r_k)} + \right. \right.$$

$$\left. (1 - \lambda) y_k^{p_{2k-1}, p_{2k}} \right) \prod_{j=2k-1}^{2k} \tilde{A}_{jp_j}(x_j) + b_k^3 y_{k-1}.$$

经后件直联型分层后, 该混合模糊系统最后输出为

$$y_L = \frac{\sum_{p_{2L-1}, p_{2L} = -m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\sum_{p_{2L-1}, p_{2L} = -m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} \left(\left(\lambda \frac{b_L r_L(p_{2L-1}, p_{2L})}{Q_d(r_L)} + \right. \right.$$

$$\left. (1 - \lambda) y_L^{p_{2L-1}, p_{2L}} \right) \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j) + b_L^3 y_{L-1}. \quad (3)$$

其中

$$Q_d(r_k) = \bigvee_{p_{2k-1}, p_{2k} = -m}^m r_k(p_{2k-1}, p_{2k}),$$

$$k = 2, 3, \dots, L,$$

其他符号说明参见文献[6]和文献[11].

此时, 为了导出广义混合模糊系统经后件直联型分层后的输入输出表达式, 首先给出一个引理. 当然, 这也是文献[11]中一个特例.

引理 1^[6] 对于任意输入变量 $(x_1, x_2, \dots, x_{2L}) \in \mathbf{R}^d$, 有下式成立:

$$\left(\sum_{p_1, p_2 = -m}^m \prod_{j=1}^2 \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \right) \left(\sum_{p_3, p_4 = -m}^m \prod_{j=3}^4 \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \right) \cdots$$

$$\left(\sum_{p_{2L-1}, p_{2L} = -m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \right) =$$

$$\sum_{p_1, p_2, \dots, p_{2L} = -m}^m \prod_{j=1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j).$$

定理 1 设 $d = 2L$, 则按上述混合模糊推理规则对广义混合模糊系统实施后件直联型分层后, 第 L 层的输入输出解析表达式为

$$y_L = \frac{\sum_{p_{2L-1}, p_{2L} = -m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\sum_{p_{2L-1}, p_{2L} = -m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} \left(\left(\lambda \times \right. \right.$$

$$\sum_{i=1}^L \sum_{k=i+1}^L \frac{b_k^3 b_i}{Q_d(r_i)} r_i(p_{2i-1}, p_{2i}) + (1 -$$

$$\left. \lambda) \sum_{i=1}^L \sum_{k=i+1}^L b_k^3 b_i y_i^{p_{2i-1}, p_{2i}} \right) \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j). \quad (4)$$

证明 根据引理 1 及上述递归公式, 若记

$$W(k) = \frac{b_k \cdot r_k(p_{2k-1}, p_{2k})}{Q_d(r_k)},$$

$$k = 2, 3, \dots, L.$$

则可推出分层后广义混合模糊系统输出表达式为

$$\begin{aligned}
y_L = & \frac{\sum_{p_{2L-1}, p_{2L}=-m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\left(\lambda W(L) + (1-\lambda)y_L^{p_{2L-1}, p_{2L}} + b_L^3 y_{L-1} \right) \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} + \\
& b_L^3 \left\{ \frac{\sum_{p_{2L-3}, p_{2L-2}=-m}^m \prod_{j=2L-3}^{2L-2} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\left(\lambda \times W(L-1) + (1-\lambda)y_{L-1}^{p_{2L-3}, p_{2L-2}} \right) \times \prod_{j=2L-3}^{2L-2} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} + b_{L-1}^3 y_{L-2} \right\} = \\
& \frac{\sum_{p_{2L-1}, p_{2L}=-m}^m \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\left(\lambda W(L) + (1-\lambda)y_L^{p_{2L-1}, p_{2L}} + b_L^3 y_{L-1} \right) \prod_{j=2L-1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} + \\
& b_L^3 \frac{\sum_{p_{2L-3}, p_{2L-2}=-m}^m \prod_{j=2L-3}^{2L-2} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)}{\left(\lambda W(L-1) + (1-\lambda)y_{L-1}^{p_{2L-3}, p_{2L-2}} \right) \prod_{j=2L-3}^{2L-2} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} + \cdots + \\
& b_L^3 b_{L-1}^3 b_{L-2}^3 \cdots b_3^3 b_2^3 y_1.
\end{aligned}$$

对上式进行通分, 再依据引理1, 即证得式(4)成立. $\square$

特别地, 因为

$$\begin{aligned}
t_k(x_{2k-1}, x_{2k}, p_{2k-1}, p_{2k}) &= y_k^{p_{2k-1}, p_{2k}} = \\
a_{k0}^{p_{2k-1}, p_{2k}} + a_{k1}^{p_{2k-1}, p_{2k}} x_{2k-1} &+ a_{k2}^{p_{2k-1}, p_{2k}} x_{2k},
\end{aligned}$$

若其中调节参数 $a_{k1}^{p_{2k-1}, p_{2k}} = a_{k2}^{p_{2k-1}, p_{2k}} = 0$, 则称该分层系统为简单广义混合分层模糊系统.

定理2 设输入变量维数 $d = 2L$, 则广义混合模糊系统按后件直联型分层后, 其内部推理规则总数为 $L(2m+1)^2$. 其中: m 是剖分输入空间的份数; L 既是分层的层数, 又是维数的一半.

证明 由于输入变量维数 $d = 2L$, 系统被分成 L 层, 每一层中有两个模糊集, 且每一个模糊集至多有 $2m+1$ 种选择, 其推理规则总数最多为 $(2m+1)^2$. 由于后件直联型分层过程中的中间变量不作为下一

层的输入项, 此层的推理规则总数仍为 $(2m+1)^2$. 因此, 按后件直联型分层方法对广义混合模糊系统实施分层后, 其推理规则总数 S 为

$$\begin{aligned}
S &= (2m+1)^2 + (2m+1)^2 + \cdots + (2m+1)^2 = \\
&L(2m+1)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

注3 因后件直联型分层方法只是将中间变量作为模糊单元输出的一个调整项, 而不作为输入项, 因而这种分层既可避免对中间变量的处理, 也可大幅降低规则数和辨识参数. 此外, 依据定理2, 实施后件直联型分层所得规则总数与半维数 $L = d/2$ 是线性关系, 即, $S_1 = L(2m+1)^2$. 然而, 若不实施分层, 则推理规则总数将为 $S_2 = (2m+1)^d$, 显然 S_2 关于维数 d 呈指数形式迅猛增长, 极易引起规则爆炸. 事实上, 当输入变量维数 d 较大时, 总有 S_1 远远小于 S_2 , 即 $L(2m+1)^2 \prec (2m+1)^d$, 故实施分层可在一定程度上避免规则爆炸现象.

例如, 若取维数 $d = 6$, 剖分数 $m = 15$, 则不分层时其规则总数将达到 $(2 \times 15 + 1)^6 = 887503681$ 条. 但如果采取后件直联型分层该系统, 则该系统规则总数将大幅度缩减为 $3(2 \times 15 + 1)^2 = 2883$, 后者较前者降低近 307841 倍. 该事实说明对系统实施分层是必要的.

2 分片线性函数与 K -积分模

分片线性函数 (PLF) 是研究模糊系统逼近性的重要工具, 它不仅是一元分段线性函数在多元情况下的推广, 而且是沟通模糊系统与逼近函数的重要桥梁. 本节, 首先给出 PLF 定义, 然后通过引入拟算术运算给出 K -积分模概念.

设 $a > 0$, 符号 $\Delta(a)$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 中的正方体, 即 $\Delta(a) =$

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid -a \leq x_i \leq a, i = 1, 2, \dots, d\}.$$

定义2^[6] 设 $S: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, 若 S 满足如下条件:

- 1) 若 S 在 $\Delta(a)$ 上连续, 且 S 在 $\Delta(a)$ 之外恒为零;
- 2) 若存在 $N_s \in \mathbf{N}$ 及 d 维多面体 $\Delta_1, \Delta_2, \dots$,

$\Delta_{N_s} \subset \Delta(a)$, 且 $\bigcup_{j=1}^{N_s} \Delta_j = \Delta(a)$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset (i \neq j)$,

使 S 在每个多面体 Δ_j 上均取线性函数, 即

$$S(X) = \sum_{i=1}^d \lambda_{ij} \cdot x_i + \gamma_j,$$

$$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Delta_j, j = 1, 2, \dots, N_s,$$

其中 λ_{ij}, γ_j 均是常数, 则称 S 为 $\mathbf{R}^d$ 上的一个分片线性函数.

本文用 D_d 表示所有 d 维分片线性函数构成的集合, $V(S)$ 表示所有多面体 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N_s}$ 顶点构成

的集合. 显然, PLF 仅连续, 不一定可微, 但其沿每个坐标分量 x_i 的左(右)偏导数却总存在. 故令

$$D_i(S) = \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in V(S)} \left(\left| \frac{\partial S_+(x_1, x_2, \dots, x_d)}{\partial x_i} \right| \vee \left| \frac{\partial S_-(x_1, x_2, \dots, x_d)}{\partial x_i} \right| \right), i \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

引理2^[6] 设 S 是一个分片线性函数, 给定一组常数 $h_1, h_2, \dots, h_d$, 则 $\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, 恒有

$$|S(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_d + h_d) - S(x_1, x_2, \dots, x_d)| \leq \sum_{i=1}^d D_i(S) |h_i|.$$

引理3^[6] 对于给定的一个模糊剖分 $\tilde{E}_a(d, m)$ 而言, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, 有

$$\frac{a(p_i - c_0)}{m} \leq x_i \leq \frac{a(p_i + c_0)}{m}.$$

其中: c_0 是最大交互数; $p_1, p_2, \dots, p_{2L} = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$.

下面, 为了研究 K -积分模意义下模糊系统的逼近性, 给出 K -积分模的定义如下:

定义3^[15] 设 $K: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ 为严格递增凹函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上可导, 并满足 $K(0) = 0, K(1) = 1$, 则称 K 为 $\mathbf{R}^+$ 上的一个诱导算子. 显然, $K(x) = \log_2(1+x)$, $K(x) = \sqrt[3]{x}$ 均为诱导算子.

定义4^[13] 设 K 是诱导算子, $\forall a, b \in \mathbf{R}^+$, 界定由 K 诱导的 a 与 b 的拟加 $\oplus$ 、拟乘 $\otimes$ 和拟减 $\ominus$ 运算为

$$\begin{aligned} a \oplus b &= K^{-1}(K(a) + K(b)), \\ |a \ominus b| &= K^{-1}(|K(a) - K(b)|), \\ a \otimes b &= K^{-1}(K(a)K(b)). \end{aligned}$$

注4 上述3种运算 $\oplus$ 、 $\ominus$ 和 $\otimes$ 统称为由 K 诱导的拟算术运算, 简称之为拟算术运算. 特别地, 对于拟减 $\ominus$ 运算而言, $\ominus$ 不是 $\oplus$ 的逆运算, 但可以等价地表示为

$$K(|a \ominus b|) = |K(a) - K(b)|.$$

定理3^[13,15] 设 K 为诱导算子, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 则可获得如下重要性质:

- 1) $K(a+b) \leq K(a) + K(b)$,
 $|K(a) - K(b)| \leq K(|a-b|);$
- 2) $K(a \oplus b) = K(a) + K(b)$,
 $K(a \otimes b) = K(a)K(b);$
- 3) $K^{-1}(a+b) = K^{-1}(a) \oplus K^{-1}(b)$,
 $K^{-1}(a \cdot b) = K^{-1}(a) \otimes K^{-1}(b);$
- 4) 若 $a \geq b$, 则
 $K(a \ominus b) = K(a) - K(b)$,
 $K^{-1}(a-b) = K^{-1}(a) \ominus K^{-1}(b).$

定义5^[16,18] 设 $(X, \mathfrak{A}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定诱导算子, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ 非负可测. 若 $A \in \mathfrak{A}$, $T = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为 A 上的任一可测剖分, 令

$$\int_A^{(K)} f d\hat{\mu} = \sup_T S_K(f, T, A),$$

$$S_K(f, T, A) = \oplus \sum_{i=1}^n \left(\inf_{x \in A_i \cap A} f(x) \otimes \hat{\mu}(A_i \cap A) \right).$$

则称 $\int_A^{(K)} f d\hat{\mu}$ 为 f 在 A 上关于 $\hat{\mu}$ 的 K -拟可加积分, 简称为 K -拟可加积分. 特别地, 当积分 $\int_A^{(K)} f d\hat{\mu} < \infty$ 时, 称 f 是 $\hat{\mu}$ -可积的.

若记 $L_+^1(\hat{\mu}) = \{f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+ | f \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 上 } \hat{\mu}\text{-可积函数}\}$, 则称 $L_+^1(\hat{\mu})$ 为 $\hat{\mu}$ -可积函数空间.

引理4^[16,18] 设 $(X, \mathfrak{A}, \hat{\mu})$ 为 K -拟可加测度空间, K 为诱导算子, $f \in L_+^1(\hat{\mu})$. 若令 $\mu(A) = K(\hat{\mu}(A))$, $\forall A \in \mathfrak{A}$, 则 μ 是 Lebesgue 测度, 且

$$\int_A^{(K)} f d\hat{\mu} = K^{-1} \left(\int_A K \circ f d\mu \right).$$

显然, K -拟可加积分是 Lebesgue 积分的推广. 现依据引理4和文献[13], $\forall A \in \mathfrak{A}$, $\forall f_1, f_2 \in L_+^1(\hat{\mu})$, 若令

$$H(f_1, f_2) \triangleq \int_A^{(K)} |f_1(x) \ominus f_2(x)| d\hat{\mu}, \quad (5)$$

则在约定几乎处处相等(a.e.)和相等不加区分条件下, 依据引理4和定理3易证 $(L_+^1(\hat{\mu}), H)$ 关于 $\oplus$ 构成一个度量空间. 称由式(5)定义的 H 为 $L_+^1(\hat{\mu})$ 在 A 上的 K -积分模. 明显地, 式(5)可以等价表示为

$$\begin{aligned} K(H(f_1, f_2)) &= \\ \int_A K(|f_1(x) \ominus f_2(x)|) d\mu &= \\ \int_A |K(f_1(x)) - K(f_2(x))| d\mu. \end{aligned}$$

引理5^[17] 设 $(X, \mathfrak{A}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, 则 D_d 按 K -积分模 H 在 $L_+^1(\hat{\mu})$ 中稠密, 亦即, 对于任意 $\varepsilon > 0$ 及 $f \in L_+^1(\hat{\mu})$, 存在某个分片线性函数 $S \in D_d$, 使得 $H(f, S) < \varepsilon$.

3 系统逼近性

在 K -积分模 H 意义下如何实现广义混合模糊系统的逼近是首要考虑的问题之一. 本节通过引理5来获取分片线性函数 S , 并借助 S 为桥梁来探究广义混合模糊系统对给定可积函数类 $L_+^1(\hat{\mu})$ 的逼近性.

定理4 设 $(\mathbf{R}^d, \mathfrak{A}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间, K 为给定诱导算子, 则广义混合模糊系统实施后件直联型分层后, 式(4)所示第 L 层输出 y_L 关于 $L_+^1(\hat{\mu})$ 是稠密的. 换言之, $\forall \varepsilon > 0$, $f \in L_+^1(\hat{\mu})$, $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ 和分层中间变量 $y_1, y_2, \dots, y_{L-1}$, 使当 $m > m_0$ 时, 第 L 层输出 y_L 关于积分模 H 满足 $H(f, y_L) < \varepsilon$.

证明 依据文献[17], 对于给定可积函数 $f \in L_+^1(\hat{\mu})$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 必存在某个紧集 $[-a, a]^d$ 上的一个

分片线性函数 S , 使得 $H(f, S) < \varepsilon/2$.

此外, $\forall p_1, p_2, \dots, p_{2L} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$, 依据文献[5]和文献[11], 若令 $a_{i1}^{p_{2i-1}, p_{2i}} = a_{i2}^{p_{2i-1}, p_{2i}} = 0$, 则通过适当选取调节参数 $b_i, b_k^3, a_{i0}^{p_{2i-1}, p_{2i}}$ ($i = 1, 2, \dots, L, k = 2, 3, \dots, L$), 总可使得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^L \sum_{k=i+1}^L \frac{b_k^3 b_i}{Q_d(r_i)} r_i(p_{2i-1}, p_{2i}) = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{k=i+1}^L b_k^3 b_i a_{i0}^{p_{2i-1}, p_{2i}} = \\ & S\left(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_{2L}}{m}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

故 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [-a, a]^d$, 依据引理3, 对于每个顶点 $\left(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_{2L}}{m}\right)$ 的分点坐标而言, 若令

$$\frac{ap_i}{m} = x_i + \frac{\theta_{p_i}}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, 2L,$$

则 $|\theta_{p_i}| \leq ac_0$, 其中 c_0 是最大交互数. 再由引理2, 必有

$$\begin{aligned} & \left| S\left(\frac{ap_1}{m}, \frac{ap_2}{m}, \dots, \frac{ap_{2L}}{m}\right) - S(x_1, x_2, \dots, x_d) \right| \leq \\ & \sum_{i=1}^d \frac{\theta_{p_i}}{m} D_i(S) \leq \frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S). \end{aligned} \quad (7)$$

若 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_{2L}) \in [-a, a]^{2L}$, 根据式(1)和(4)~(7), 对于分层后第 L 层输出 y_L 而言, 有

$$\begin{aligned} & K(H(S, y_L)) = \\ & \int_{[-a, a]^d} |K(S(x)) - K(y_L(x))| d\mu \leq \\ & \int_{[-a, a]^d} |K(S(x) - y_L(x))| d\mu = \\ & \int_{\Delta(a)} K\left(\frac{1}{\sum_{p_1, \dots, p_{2L}=-m}^m \prod_{j=1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} \middle| \sum_{p_1, \dots, p_{2L}=-m}^m (\lambda \times \right. \\ & S\left(\frac{ap_1}{m}, \dots, \frac{ap_{2L}}{m}\right) + (1-\lambda)S\left(\frac{ap_1}{m}, \dots, \frac{ap_{2L}}{m}\right) - \\ & S(x_1, \dots, x_d) \left. \prod_{j=1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \right) d\mu \leq \\ & \int_{\Delta(a)} K\left(\frac{\sum_{p_1, \dots, p_{2L}=-m}^m}{\sum_{p_1, \dots, p_{2L}=-m}^m \prod_{j=1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j)} \middle| S(x_1, \dots, x_n) - \right. \\ & S\left(\frac{ap_1}{m}, \dots, \frac{ap_{2L}}{m}\right) \left. \prod_{j=1}^{2L} \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \right) \leq \\ & \int_{\Delta(a)} K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) d\mu = \\ & K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) (2a)^d. \end{aligned}$$

此时, 两边用算子 K^{-1} 作用 (K^{-1} 仍递增), 便有

$$H(S, y_L) \leq K^{-1}\left(K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) (2a)^d\right),$$

故 $\forall \varepsilon > 0$. 若使

$$K^{-1}\left(K\left(\frac{ac_0}{m} \sum_{i=1}^d D_i(S)\right) (2a)^d\right) < \varepsilon,$$

则

$$m > \frac{ac_0 \sum_{i=1}^d D_i(S)}{K^{-1}(K(\varepsilon)/(2a)^d)}.$$

令

$$m_0 = \left\lceil \frac{ac_0 \sum_{i=1}^d D_i(S)}{K^{-1}(K(\varepsilon)/(2a)^d)} \right\rceil \in \mathbf{N},$$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbf{N}$, 当 $m > m_0$ 时, $H(S, y_L) < \varepsilon$.

再由 $(L_+^1(\hat{\mu}), H)$ 关于拟加运算 $\oplus$ 构成一个度量空间, 则有

$$\begin{aligned} & H(f, y_L) \leq H(f, S) \oplus H(S, y_L) < \\ & \varepsilon \oplus \varepsilon = K^{-1}(K(2\varepsilon)). \end{aligned} \quad (8)$$

因诱导算子 K 严格递增, 所以 K^{-1} 也严格递增, 故由 ε 的任意性, 表达式 $K^{-1}(K(2\varepsilon))$ 仍可任意小, 从而证明了实施后件直联型分层后第 L 层输出 y_L 对 f 仍具有逼近性能. $\square$

注5 模糊系统的构造主要取决于对输入空间的剖分数 m_0 . 定理4虽然给出了剖分数 m_0 的下界, 但并不易计算. 这是因为 m_0 的取值通常与分片线性函数 S 的左(右)偏导数 $D_i(S)$ 有关, 而本文并未实际给出 S , 只是理论上起到一个桥梁作用. 文献[17]虽然给出了 S 的表达式, 但使用不甚方便. 为此, 本文将继续探讨依赖于可积函数 $f \in L_+^1(\hat{\mu})$ 的剖分数 m_0 .

定理5 设 $(\mathbf{R}^d, \mathfrak{R}, \hat{\mu})$ 是 K -拟可加测度空间. 给定 $f \in L_+^1(\hat{\mu})$, y_L 是式(4)所示广义混合模糊系统实施后件直联型分层后第 L 层输出表达式. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0$ 和 $h > 0$, 令

$$\begin{aligned} D_h(f) = & \max_{1 \leq i \leq d} \sup_{x_i, x_i+h \in [-a, a]} |(f(x_1, \dots, x_i+h, \dots, x_d) - \\ & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d))/h|, \end{aligned}$$

则必存在自然数 $m_0 \in \mathbf{N}$, 当 $m > m_0$ 时, 总有第 L 层输出满足 $H(f, y_L) < \varepsilon$.

证明 依据 $D_h(f)$ 和 $D_i(S)$ 的定义, 明显有

$$D_i(S) \leq \max_{1 \leq i \leq d} D_i(S) = D_h(f),$$

更有 $\sum_{i=1}^d D_i(S) \leq dD_h(f)$. 依据定理4, $\forall \varepsilon > 0$, 若使

$$H(S, y_L) \leq$$

$$K^{-1}\left(K\left(\frac{ac_0}{m}\sum_{i=1}^d D_i(S)\right)(2a)^d\right) \leq$$

$$K^{-1}\left(K\left(\frac{ac_0}{m}\sum_{i=1}^d D_h(f)\right)(2a)^d\right) < \varepsilon,$$

则

$$m > \frac{ac_0 d D_h(f)}{K^{-1}(K(\varepsilon)/(2a)^d)}.$$

令

$$m_0 = \left\lceil \frac{ac_0 d D_h(f)}{K^{-1}(K(\varepsilon)/(2a)^d)} \right\rceil \in \mathbf{N},$$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbf{N}$, 当 $m > m_0$ 时, $H(S, y_L) < \varepsilon$.

再依据式(8), 可立即获得分层后第 L 层输出 y_L 对 f 具有任意逼近精度, 亦即 $H(f, y_L) < \varepsilon$. $\square$

注6 定理5找出的下界 m_0 虽然只是分子部分用 $dD_h(f)$ 替代了 $\sum_{i=1}^d D_i(S)$, 但二者有本质区别. 实际中, 若被逼近函数 $f(x)$ 的偏导数存在, 则由 $D_h(f)$ 的定义容易计算 $D_h(f)$ 值. 但若 $f(x)$ 的偏导数不存在, 则 $D_h(f)$ 的值不容易计算, 参见后文模拟实例.

4 模拟实例

首先, 在式(3)所表示的后件直联型分层广义混合模糊系统中, 给定诱导算子 $K(x) = x^{\frac{7}{8}}$, 令调节参数 $\lambda = 2/3 \in [0, 1]$, 且 $d = 2L = 4, c_0 = 2$. 该系统共有4个输入变量, 将此分为2层 ($L = 2$).

现定义四元待逼近函数 $f: [-1, 1]^4 \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 + x_2^3 + |x_3|^3 + |x_4|^3)}, & x_2 \geq 0; \\ -e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 - x_2^3 + |x_3|^3 + |x_4|^3)}, & x_2 < 0. \end{cases}$$

为了方便起见, 记 $\Delta(1) = [-1, 1]^4$. 显然, 四元函数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在 $\Delta(1) \subset \mathbf{R}^4$ 的超平面 $x_2 = 0$ 上不连续(出现断面), 如图2和图3所示.

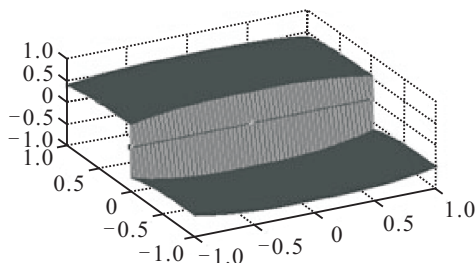


图2 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 时 f 的曲面图

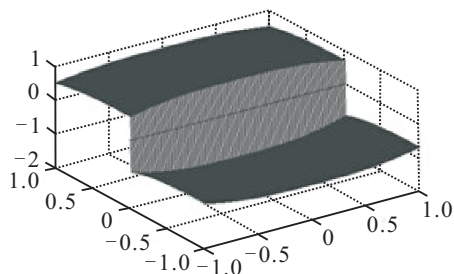


图3 $x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}$ 时 f 的曲面图

容易验证

$$\int_{\mathbf{R}^4} K(f(x_1, x_2, x_3, x_4)) d\mu =$$

$$\int \int \int \int_{\Delta(1)} |f(x_1, x_2, x_3, x_4)|^{\frac{7}{8}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 =$$

$$\left(2 \int_0^1 e^{-\frac{7x^3}{120}} dx\right)^3 \left[\int_{-1}^0 e^{\frac{7x_2^3}{120}} dx_2 + \int_0^1 e^{-\frac{7x_2^3}{120}} dx_2\right] =$$

$$16 \left(\int_0^1 e^{-\frac{7x^3}{120}} dx\right)^4 < +\infty,$$

故 $\int_{\mathbf{R}^4}^{(K)} f d\hat{\mu} < +\infty$. 即, f 在 $\mathbf{R}^4$ 上 $\hat{\mu}$ 可积 $\Leftrightarrow f \in L_+^1(\hat{\mu})$, 且 $0 \leq |f(x_1, x_2, x_3, x_4)| \leq 1$. 以下为简单起见, 令

$$\beta_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 + x_2^3 + |x_3|^3 + |x_4|^3)},$$

$$\beta_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 - x_2^3 + |x_3|^3 + |x_4|^3)}.$$

显然, $\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Delta(1)$, 必满足

$$|x_1|^3 \pm x_2^3 + |x_3|^3 + |x_4|^3 \geq \pm x_2^3 \geq -1.$$

换言之, β_1 和 β_2 分别在点 $(0, -1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 0, 0)$ 取得最大值, 故总有

$$0 < \beta_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq e^{\frac{1}{15}}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

此外, 对每个 $i = 1, 3, 4$, 依偏导数定义得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{1}{5} x_i^2 \beta_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \operatorname{sgn}(x_i), & x_2 > 0; \\ -\frac{1}{5} x_i^2 \beta_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \operatorname{sgn}(x_i), & x_2 < 0. \end{cases}$$

其中 $\operatorname{sgn}(x_i)$ 为关于分变量 x_i 的符号函数. 特别地, 关于分变量 x_2 的偏导数计算如下:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{cases} -\frac{1}{5} x_2^2 \beta_1(x_1, x_2, x_3, x_4), & x_2 > 0; \\ -\frac{1}{5} x_2^2 \beta_2(x_1, x_2, x_3, x_4), & x_2 < 0. \end{cases}$$

显然, 除超平面 $x_2 = 0$ 以外, 依据式(9)均有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq \frac{1}{5} e^{\frac{1}{15}}, \quad i = 1, 2, \dots, 4.$$

当 h 充分小时, 依据定理5容易推出 $D_h(f) \leq \frac{1}{5} e^{\frac{1}{15}}$, 即 $\frac{1}{5} e^{\frac{1}{15}}$ 为 $D_h(f)$ 的一个上界.

为了简单起见, 不妨取 $D_h(f) = \frac{1}{5} e^{\frac{1}{15}}$, 对于给定的逼近精度 $\varepsilon = 0.2$ 而言, 依据定理5可立即获知

$$m > \frac{ac_0 d D_h(f)}{K^{-1}(K(\varepsilon)/(2a)^d)} =$$

$$\frac{1 \times 2 \times 4}{5 \left(\frac{0.2^{\frac{7}{8}}}{2^4}\right)^{\frac{8}{7}}} e^{\frac{1}{15}} \approx 162.2676.$$

令 $m = 163$, 并依据 m 值先在 x_1 轴(相当于通常 x 轴)定义3个三角模糊集 $\tilde{A}$ 为

$$\tilde{A}(x_1) = \begin{cases} 1 - 163x_1, & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{163}; \\ 1 + 163x_1, & -\frac{1}{163} \leq x_1 < 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{1(-163)}(x_1) = \begin{cases} -163x_1 - 162, & -1 \leq x_1 \leq -\frac{162}{163}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{1(163)}(x_1) = \begin{cases} 163x_1 - 162, & \frac{162}{163} \leq x_1 \leq 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此时, 在 x_1 轴 $[-1, 1]$ 上将上述模糊集 $\tilde{A}$ 逐次左右平移 $\frac{1}{163}$ 个长度单位, 即令

$$\tilde{A}_{1j}(x_1) = \tilde{A}\left(x_1 - \frac{j}{163}\right), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 162.$$

从而获得一个等距模糊剖分 $\{\tilde{A}_{1j}\}$, 且两端模糊集为 $\tilde{A}_{1(163)}$ 和 $\tilde{A}_{1(-163)}$.

同理, 分别在 x_2, x_3, x_4 轴 $[-1, 1]$ 上依次构造等距模糊剖分 $\{\tilde{A}_{2j}\}, \{\tilde{A}_{3j}\}$ 和 $\{\tilde{A}_{4j}\}$, 即令

$$\tilde{A}_{2j}(x_2) = \tilde{A}_{1j}(x_2), \quad \tilde{A}_{3j}(x_3) = \tilde{A}_{1j}(x_3),$$

$$\tilde{A}_{4j}(x_4) = \tilde{A}_{1j}(x_4), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 163.$$

现取调节参数 $\lambda = 1/3$, 并将上式代入式 (4), 获得后件直联型分层广义混合模糊系统的通式为

$$y = y_2 = \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4, q=-163}^{163} \prod_{j=1}^4 \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \times \tilde{C}_q(y_1) f\left(\frac{p_1}{163}, \frac{p_2}{163}, \frac{p_3}{163}, \frac{p_4}{163}\right) / \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4, q=-163}^{163} \prod_{j=1}^4 \tilde{A}_{jp_j}(x_j) \tilde{C}_q(y_1),$$

其中分层后第1层 y_1 如式 (2) 所示, 取第1层输出模糊集

$$\tilde{B}_{p_1 p_2}(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y - \frac{r_1(p_1, p_2)}{163}\right)\right),$$

这里调节参数函数

$$r_1(p_1, p_2) = \left[\frac{p_1 + p_2}{2}\right],$$

输出后件混合模糊集为

$$\tilde{C}_q = \frac{1}{3} \tilde{V}_{t(p_1, p_2; x_1, x_2)} + \frac{2}{3} \tilde{B}_{p_1 p_2}.$$

下面, 为了在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 上描述曲面图形, 不妨取定如下 x_3 和 x_4 两组数, 并应用 Matlab 软件编程, 获得 $\mathbf{R}^3$ 上 f 曲面图和分层后该系统的曲面图, 如图4和图5所示, 其中 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 和 $x_3 = 1/2, x_4 = 1/3$ 时 f 的二维解析式分别退化为

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 + x_2^3)}}, & x_2 \geq 0; \\ -e^{-\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 - x_2^3)}}, & x_2 < 0. \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-\frac{35}{216}e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 + x_2^3)}}, & x_2 \geq 0; \\ -e^{-\frac{35}{216}e^{-\frac{1}{15}(|x_1|^3 - x_2^3)}}, & x_2 < 0. \end{cases}$$

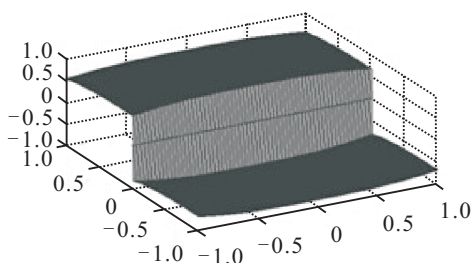


图4 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 时 y_L 的曲面图

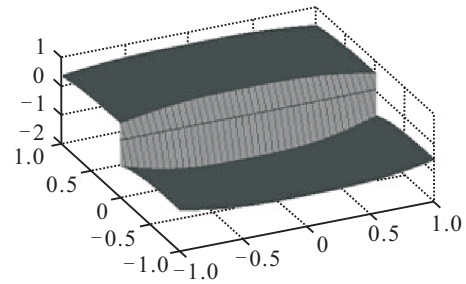


图5 $x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}$ 时 y_L 的曲面图

注7 通过两组图片不难看出分层后系统与原函数具有较好的近似性, 这说明对广义混合模糊系统实施后件直联型分层后仍保持其逼近性能. 此外, 对于给定的逼近精度 $\epsilon = 0.2$, 按本例所求 $m = 163$. 此时, 若依据定理2, 该混合模糊系统经后件直联型分层后的规则总数为 $L(2m+1)^2 = 2(2 \times 163 + 1)^2 = 213858$; 若该系统不实施分层, 则规则总数将达到 $(2m+1)^4 = (2 \times 163 + 1)^4 = 11433811041$, 一下猛增53464.5倍. 因此, 按后件直联型分层方法实施分层, 其规则总数降低幅度是非常巨大的.

5 结 论

通常对模糊系统进行分层总存在一些不如意的地方, 例如, 系统结构变得更复杂, 需要调节的参数增多以及层与层之间的变量没有明确含义等. 事实证明, 本文所得分层系统能大幅度降低系统内部推理规则总数和诸多待辨识参数, 并且保证了该分层系统在其规则总数大幅度减少的情况下仍具有逼近性能. 此外, 通过模拟实例验证了该分层系统的实现过程和逼近效果, 为进一步研究广义模糊系统的逼近性提供了新方法. 模拟结果表明, 后件直联型分层混合模糊系统在模糊控制和推理建模等方面具有一定理论意义. 然而, 如何提高分层后系统的逼近精度和通过修正调节参数来达到更好的逼近效果是下一步要重点考虑的问题.

参考文献(References)

- [1] Raju G V S, Zhou J, Kisner R A. Hierarchical fuzzy control[J]. International J of Control, 1991, 54(5): 1201-1216.
- [2] Raju G V S, Zhou J. Adaptive hierarchical fuzzy controller[J]. IEEE Trans on System, Man, and Cybernetics, 1993, 23(4): 973-980.
- [3] Wang L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems[J]. Fuzzy Set and Systems, 1998, 93(1): 223-230.
- [4] Wang L X. Analysis and design of hierarchical fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy System, 1999, 7(5): 617-624.
- [5] Liu P Y, Li H X. Equivalence of generalized Takagi-Sugeno fuzzy system and its hierarchical systems[J]. J of Beijing

- Normal University: Natural Science, 2000, 36(5): 612-618.
- [6] Liu P Y, Li H X. Hierarchical T-S fuzzy system and its universal approximation[J]. Information Sciences, 2005, 169(3): 279-303.
- [7] 张香燕, 张乃尧. 一般二叉树型分层模糊系统的通用逼近性[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2007, 47(1): 37-41. (Zhang X Y, Zhang N Y. Universal approximation of general binary-tree-type hierarchical fuzzy systems[J]. J of Tsinghua University: Science and Technology, 2007, 47(1): 37-41.)
- [8] Ricardo J, Campello G B, Wagner C. Hierarchical fuzzy relational models: Linguistic interpretation and universal approximation[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14(3): 446-453.
- [9] Chen Y, Yang B, Abraham A, et al. Automatic design of hierarchical Takagi-Sugeno type fuzzy systems using evolutionary algorithms[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(3): 385-397.
- [10] Moon G J, Thomas S. A method of converting a fuzzy system to a two-layered hierarchical fuzzy system and its run-time efficiency[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(1): 93-103.
- [11] 王贵君, 段晨霞. 广义分层混合模糊系统及其泛逼近性[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(5): 673-680. (Wang G J, Duan C X. Generalized hierarchical hybrid fuzzy systems and their universal approximation[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29 (5): 673-680.)
- [12] 杨阳, 王贵君, 杨永强. 基于二叉树型分层的广义混合模糊系统推理规则数的缩减[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(6): 765-772. (Yang Y, Wang G J, Yang Y Q. Reducing the number of inference rules for generalized hybrid fuzzy systems based on binary tree-type hierarchy[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(6): 765-772.)
- [13] 王贵君, 李晓萍, 隋晓琳. 广义 Mamdani 模糊系统依 K -积分模的泛逼近性及其实现过程[J]. 自动化学报, 2014, 40(1): 143-148. (Wang G J, Li X P, Sui X L. Universal approximation and its realize process of generalized Mamdani fuzzy system in K -integral norms[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(1): 143-148.)
- [14] 朱晓东, 王杰. 一种新型分层模糊系统及其逼近性能[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1559-1563. (Zhu X G, Wang J. A new type of hierarchical fuzzy system and its approximation performance[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1559-1563.)
- [15] 王贵君, 李晓萍. K -积分模意义下折线模糊神经网络的泛逼近性[J]. 中国科学: 信息科学, 2012, 42(3): 362-378. (Wang G J, Li X P. Universal approximation of polygonal fuzzy neural networks in sense of K -integral norms[J]. Science China: Information Sciences, 2012, 42(3): 362-378.)
- [16] 王贵君, 李晓萍. K -拟可加模糊值积分及其收敛性[J]. 数学进展, 2006, 35(1): 109-119. (Wang G J, Li X P. K -quasi-additive fuzzy number valued integral and its convergences[J]. Advances in Mathematics, 2006, 35(1): 109-119.)
- [17] 彭维玲. 基于剖分模糊系统输入空间的多维分片线性函数的构造及逼近[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(3): 340-351. (Peng W L. Structure and approximation of a multidimensional piecewise linear function based on the input space of subdivision fuzzy systems[J]. System Science and Mathematical Sciences, 2014, 34(3): 340-351.)
- [18] 蒋兴忠. tK -积分和 Kt -积分[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 1993, 16(2): 31-39. (Jiang X Z. tK -integral and Kt -integral[J]. J of Sichuan Normal University: Natural Science, 1993, 16(2): 31-39.)

(责任编辑: 齐 霖)