

V 形河谷中土石坝垂直振动的近似解析

沈振中¹, 徐志英²

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 假设坝体的剪切模量随深度呈指数变化, 运用三维剪切楔理论, 导出了土石坝垂直振动的控制微分方程, 采用分离变量法和伽辽金逼近法求得了计算土石坝垂直振动前三阶振型自振频率的代数公式, 然后应用反应谱技术, 获得了相应的估计土石坝垂直地震反应的最大位移、最大速度、最大加速度以及最大应力的计算公式。

关键词 土石坝; 垂直振动; 振型; 地震反应; 反应谱

中图分类号: TV641 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2002)02-0085-05

随着土石坝技术和计算分析水平的不断提高, 在震区兴建的高土石坝越来越多, 其地震稳定性也越来越得到重视。土石坝的地震破坏主要有地震裂缝、地震液化和边坡滑动等, 都与地震动应力有关。由于所求问题的复杂性以及边界条件存在耦合等因素, 迄今为止, 只有矩形、半圆形、半椭圆形等形状简单的刚性河谷中的土石坝的振动问题求得了精确解答, 且这些解答基本上都是针对横向振动和纵向振动问题的。矩形河谷中均匀土石坝垂直振动的精确解答已由 Gazetas(1981) 得到^[1]。显然, 由于边界的影响, 作为平面问题考虑的解答与实际三维问题存在较大的差异, 且土石坝的材料存在明显的非均匀性, 因此, 需要考虑峡谷中非均匀土石坝的垂直振动问题。笔者已经求得 V 形河谷中土石坝垂直振动第一振型的近似解答^[2]。本文在此基础上进一步导出了计算 V 形河谷中非均匀土石坝垂直振动前三阶振型自振频率的代数公式, 并给出相应的最大地震反应的近似解答。这里的非均匀是指坝体材料的剪切模量随深度的不同而连续变化。

1 土石坝垂直振动的微分方程

本文在推导土石坝振动的控制微分方程时采用如下常用假设: (a) 坝体为楔形体, 座落在 V 形河谷的刚性基岩上, 如图 1 所示; (b) 坝体是均一的线弹性体; (c) 地基的运动是垂直向的; (d) 坝体与库水间的相互作用可以忽略, 如空库工况; (e) 坝体材料是非均匀的, 其剪切模量随着深度的增大而连续变化, 且可用指数函数表示为^[3]

$$G(y) = G_0 \left(\frac{y}{H} \right)^m \quad (1)$$

式中: G_0 ——坝底的剪切模量, MPa; H ——最大坝高, m; l/m ——试验常数, 称为非均匀指数, 可取 0, 1/3, 2/5, 1/2, 1 等。

首先考虑坝体自由振动。取沿纵向的单元体, 如图 1(b) 所示。考虑单元体沿 y 方向的平衡, 则可得到土石坝垂直振动的控制微分方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{v_{s0}^2}{H_m} \left[\xi \left(1 + \frac{l}{m} \right) y^{m-1} \frac{\partial v}{\partial y} + \xi y^m \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + y^m \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

式中: $v(y, z, t)$ ——沿 y 方向的相对位移, m; v_{s0} ——坝体底部的剪切波速, $v_{s0} = \sqrt{G_0/\rho}$, m/s; ρ ——坝体材料的密度, kg/m³; t ——时间, s; $\xi = 2(1 + \mu)$, μ ——坝体材料的泊松比。

相应的边界条件是坝体与基岩无相对滑动、坝顶面上的正应力为零, 即

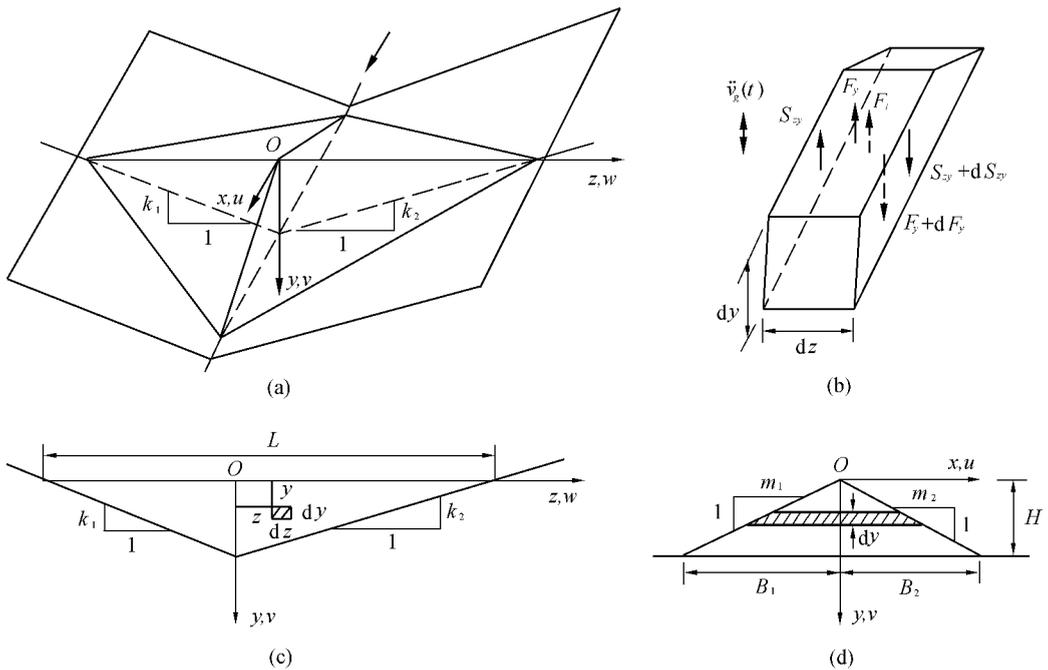


图1 V形河谷中土石坝垂直振动的剪切楔分析模型

Fig.1 Shear wedge model of vertical vibration of earth-rock dams in triangular canyons

$$\begin{cases} v = 0 & \text{当 } y = H + k_1 z, y = H - k_2 z \\ E \frac{\partial v}{\partial y} & \text{当 } y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: k_1, k_2 ——河谷的边坡参数; E ——坝体材料的杨氏模量, $E = \xi G$.

2 自振频率的近似解答

采用分离变量法, 将 $v(y, z, t) = \Phi(y, z)T(t)$ 代入式(2), 可得到关于时间变量和空间变量的微分方程

$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad (4)$$

$$\xi \left(1 + \frac{l}{m}\right) y^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \xi y^m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + y^m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 H^m}{v_{s0}^2} \Phi = 0 \quad (5)$$

式中 ω 为土石坝垂直振动的自振频率. 式(4)的通解是

$$T(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (6)$$

式中 A_1, A_2 为任意常数. 同时, 由于式(3)所示的边界条件在任意时刻都需要满足, 因此, 可以分离出关于空间变量函数 $\Phi(y, z)$ 的边界条件

$$\begin{cases} \Phi = 0 & \text{当 } y = H + k_1 z, y = H - k_2 z \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 & \text{当 } y = 0 \end{cases} \quad (7)$$

由于边界条件式(7)不能进一步分离出关于各空间变量的独立方程, 因此由式(5)和式(7)组成的定解问题的闭合解是难以得到的. 然而, 通过如下方法可以获得该问题的近似解答.

根据伽辽金(Galerkin)方法⁴¹, 如果一个函数满足边界条件式(7), 则如下积分得到的代数方程可以确定坝体垂直振动的自振频率:

$$\int_0^H \int_{-\frac{1}{k_1}(H-y)}^{\frac{1}{k_2}(H-y)} R(y, z) \Phi(y, z) dy dz = 0 \quad (8)$$

式中 $R(y, z)$ 为式(5)的左端项, 即

$$R(y, z) = \xi \left(1 + \frac{l}{m}\right) y^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \xi y^m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + y^m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 H^m}{v_{s0}^2} \Phi$$

现试验函数

$$\Phi(y, z) = \frac{1}{H^4} [y^2 - (H + k_1 z)^2] [y^2 - (H - k_2 z)^2] \quad (9)$$

可以验证, $\Phi(y, z)$ 可以满足边界条件式(7)。另外, 根据多项式函数的本身特性, 如果 $\Phi(y, z)$ 能满足边界条件式(7), 则形如 $r\Phi^n(y, z)$ 的多项式函数也都能满足边界条件式(7), 其中 r 为有理数, n 为正整数。构造如下函数:

$$\Phi_1(y, z) = \Phi(y, z) \quad (10)$$

$$\Phi_2(y, z) = -[\Phi(y, z) - 1.64\Phi^2(y, z)]/0.64 \quad (11)$$

$$\Phi_3(y, z) = [\Phi(y, z) - 4\Phi^2(y, z) + 3.424\Phi^3(y, z)]/0.424 \quad (12)$$

并分别代入式(8)进行积分, 可求得计算第一自振频率 ω_1 、第二自振频率 ω_2 和第三自振频率 ω_3 的代数公式。相应地, 式(10)~式(12)给出的函数即为上述自振频率的第一振型函数、第二振型函数和第三振型函数。由于项数太多, 这里仅给出对称河谷情况下上述 5 种非均匀指数的自振频率计算公式, 并记为

$$\omega_{ij} = \frac{v_{s0}}{H} \sqrt{P_{ij}\xi + Q_{ij}k^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

其中 P_{ij} 和 Q_{ij} 的值见表 1。上述三个振型函数在坝顶和中央断面上的形态如图 2 所示。

表 1 土石坝垂直振动的前三阶自振频率的计算参数

Table 1 Computation parameters of first three natural frequencies of vertical vibration of earth-rock dams

j	l/m	P_{1j}	Q_{1j}	P_{2j}	Q_{2j}	P_{3j}	Q_{3j}
1	0	11.2500	5.0000	36.3030	20.6064	77.6991	49.8836
2	1/3	7.3048	3.1728	21.8149	11.7665	45.5238	27.8613
3	2/5	6.7617	2.9249	19.8996	10.6516	41.3910	25.1590
4	1/2	6.0488	2.6013	17.4252	9.2332	36.1040	21.7508
5	1	3.6905	1.5476	9.6633	4.9661	19.9649	11.7162

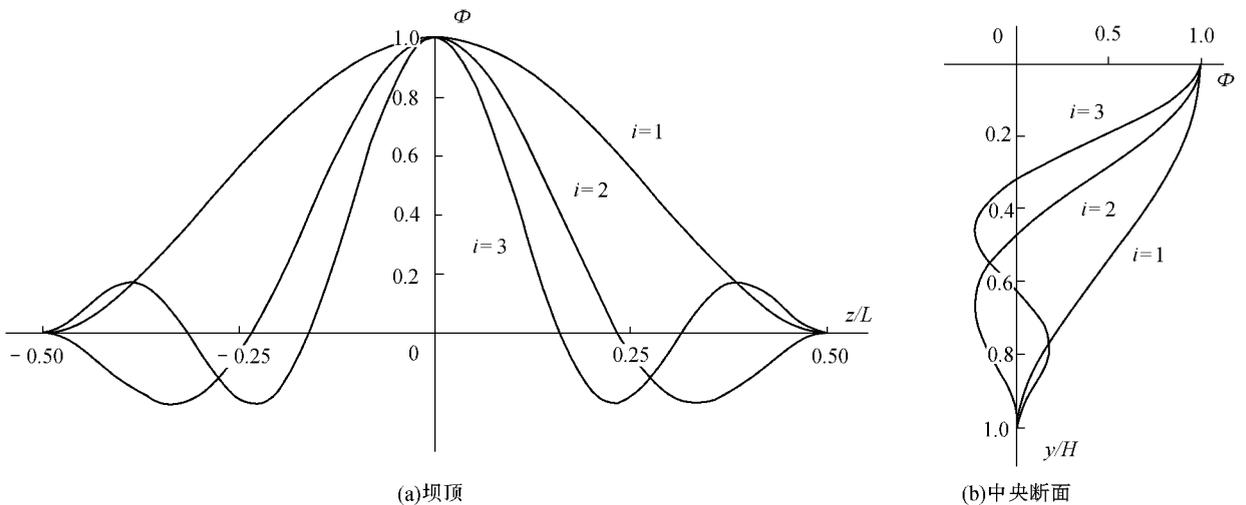


图 2 土石坝垂直振动的前三阶振型函数

Fig. 2 The first three mode shapes of vertical vibration of earth-rock dams

3 土石坝的垂直地震反应

可以导出有阻尼的土石坝垂直振动的控制微分方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{c}{p} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{G_0}{\rho H m} \left[\xi \left(1 + \frac{l}{m} \right) y^{m-1} \frac{\partial v}{\partial y} + \xi y^m \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + y^m \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] = -\ddot{v}_g(t) \quad (14)$$

式中: $\ddot{v}_g(t)$ ——基岩 y 方向的地震运动加速度 m/s^2 ; c ——阻尼系数 $kg/(m^3 \cdot s)$ 。

采用分离变量法, 令 $v(y, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(y, z) T_j(t)$ 。代入式(14), 并在方程两边同时乘以 $\Phi_i \rho y dy dz$, 根据

正交性原理,可求得仅代表某一种振型 Φ_i 的方程式.对于前三阶振型,有

$$T_i'' + 2\lambda_i\omega_i T_i' + \omega_i^2 T_i = -\eta_i \ddot{v}_g(t) \quad i = 1, 2, 3 \tag{15}$$

$$\xi \left(1 + \frac{l}{m}\right) y^{m-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \xi y^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial y^2} + y^m \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} + \frac{\omega_i^2 H_m^L}{v_{s0}^2} \Phi_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \tag{16}$$

式中: ω_i ——第 i 阶自振频率; λ_i ——第 i 阶振型的阻尼比, $\lambda_i = c/(2\rho\omega_i)$; η_i ——第 i 阶振型的参与系数,由下式计算:

$$\eta_i = \int_0^H \int_{-\frac{1}{k_1}(H-y)}^{\frac{1}{k_2}(H-y)} \Phi_{iy} dy dz / \int_0^H \int_{-\frac{1}{k_1}(H-y)}^{\frac{1}{k_2}(H-y)} \Phi_{iy}^2 dy dz \tag{17}$$

将式(10)~式(12)分别代入式(17),并进行积分.如取 $k_1 = k_2 = k$,则可以得到对称 V 形河谷中土石坝垂直振动的前三阶振型参与系数 $\eta_1 = 1.856, \eta_2 = 1.151, \eta_3 = 1.051$.于是,式(15)的解可写为

$$T_i(t) = \frac{-\eta_i}{\omega_i'} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\lambda_i\omega_i'(t-\tau)} \sin[\omega_i'(t-\tau)] d\tau \quad i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

其中 $\omega_i' = \omega_i \sqrt{1 - \lambda_i^2}$.式(18)所示的杜哈美(Duhamal)积分通常由数值积分求得.

由于高阶振型对坝体地震反应的影响较小,因此,实际情况下只需考虑 3~5 个低阶振型即可满足工程应用的精度要求.这样 V 形河谷中非均匀土石坝垂直振动的地震反应可近似地表示为

$$v \approx \sum_{i=1}^3 \Phi_i T_i \quad \dot{v} \approx \sum_{i=1}^3 \Phi_i \dot{T}_i \quad \ddot{v} \approx \sum_{i=1}^3 \Phi_i \ddot{T}_i \quad \sigma_y \approx \sum_{i=1}^3 \xi G \Phi_{iy}' T_i \quad \tau_{zy} \approx \sum_{i=1}^3 G \Phi_{iz}' T_i \tag{19}$$

式中 Φ_i, Φ_{iy}' 和 Φ_{iz}' 分别由式(10)、式(11)和式(12)及其偏导数得到; $T_i, \dot{T}_i, \ddot{T}_i$ 分别由式(18)及其导数得到.利用数值积分,由式(19)可计算各地震反应的时程曲线.在工程上,最感兴趣的是各反应量的最大值.为此,可以利用地震反应谱来计算各反应量的最大值,而不做繁复的杜哈美积分.计算公式为

$$v_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\eta_i \Phi_i |S_{d,i}|)^2} \tag{20}$$

$$\dot{v}_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\eta_i \Phi_i |S_{v,i}|)^2} \tag{21}$$

$$\ddot{v}_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\eta_i \Phi_i |S_{a,i}|)^2} \tag{22}$$

$$\sigma_{y,\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\xi G |\eta_i \Phi_{iy}'| |S_{d,i}|)^2} \tag{23}$$

$$\tau_{zy,\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^3 (G |\eta_i \Phi_{iz}'| |S_{d,i}|)^2} \tag{24}$$

其中 $S_{d,i}, S_{v,i}$ 和 $S_{a,i}$ 分别是地震反应第 i 阶振型的位移反应谱、速度反应谱和加速度反应谱.

4 结 语

本文推导了 V 形河谷中非均匀土石坝垂直振动分析的近似理论公式,得到了土石坝垂直振动前三阶振型的近似理论解答.虽然推导自振频率的计算公式以及计算振动参与系数的过程极为繁复,但是,得到了可供手算的代数公式,为土石坝垂直地震反应的简化分析奠定了基础.目前尚缺乏 V 形河谷中土石坝振动分析的理论解答.利用本文给出的三维简化动力分析法和相应的解析公式,可迅速计算土石坝的各种地震反应量.特别是利用地震反应谱,可迅速求得土石坝的最大反应量.

参考文献:

[1] Gazetas G. Vertical oscillation of earth and rockfill dams: analysis and field observation[J]. Soils and Foundations, 1981, 21(4): 56~68.
[2] Shen Zhenzhong, Xu Zhiying. Vertical vibration of inhomogeneous earth dams in triangular canyons[A]. In: Yuan Jianxin, eds. Proc of the 9th Inter Conf of the Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics[C]. Rotterdam: A. A. Balkema Press, 1997. 1783

~ 1787.

- [3] Abdel-Ghaffar A M , Aik-Siong Koh. Longitudinal vibration of non-homogeneous earth dams[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics , 1981(9) 279 ~ 305.
- [4] Zienkiewicz O C , Taylor R L. The finite element method[M]. 5th ed. Oxford : Butterworth and Heineman , 2000. 39 ~ 86.

Approximate Solution to Vertical Vibration of Earth-Rock Dams in Triangular Canyons

SHEN Zhen-zhong¹ , XU Zhi-ying²

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;
2. College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : In this paper , an approximate theoretical method is proposed for evaluation of vertical earthquake responses of inhomogeneous earth-rock dams in triangular canyons. Under the assumption that the shear modulus of dam material varies with depth as an exponent function , and based on the three-dimensional shear wedge theory , a governing differential equation of vertical vibration is derived for earth-rock dams. Then , by use of the variable separation and Bubnov-Galerkin method , some algebraic formulas are derived for calculation of the natural frequencies of the first , second , and third vibration modes of dams , and by use of the technique of response spectrum , some corresponding formulas are obtained for calculation of some maximum values reflecting earthquake responses of dams , such as the maximum dynamic displacement , velocity , acceleration , stress , and so on.

Key words : earth-rock dam ; vertical vibration ; vibration mode ; earthquake response ; response spectrum

欢迎订阅

全国水利系统优秀期刊 江苏省优秀期刊

欢迎投稿

水利水电科技进展

新颖 实用 快捷

双月刊 A4 开本 彩色封面 64 页 2002 年全年定价 30.00 元 全国各地邮局均可订阅



(也可直接汇款至编辑部订阅 ,
另加 6.00 元邮寄费)

国际标准刊号 : ISSN 1006-7647

国内统一刊号 : CN 32-1439/TV

国外发行代号 : DK 32003

(中国出版对外贸易总公司)

国内邮发代号 : 28-244

编辑部地址 : 210098 南京市西康路 1 号

联系电话 : (025) 3786335

电子信箱 : jz@hhu.edu.cn

银行账号 : 南京工行宁海路分理处

4301011409001024513