

文章编号: 1674-8085(2016)04-0006-03

一类奇性的 p -Laplacian-Rayleigh 方程的 周期正解的存在性

陈仕洲

(韩山师范学院数学与统计学院, 广东, 潮州 521041)

摘 要: 利用重合度理论, 研究一类具有奇性的 p -Laplacian-Rayleigh 方程, 获得其周期正解存在性新的充分条件, 推广和改进了已有文献中的相关结论。

关键词: p -Laplacian-Rayleigh 方程; 周期正解; 奇性; 重合度理论

中图分类号: O175.12

文献标识码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1674-8085.2016.04.002

POSITIVE PERIODIC SOLUTIONS FOR A KIND OF P-LAPLACIAN-RAYLEIGH EQUATION WITH SINGULARITY

CHEN Shi-zhou

(College of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou, Guangdong 521041, China)

Abstract: Based on the continuation theorem of coincidence degree, we study a kind of p -Laplacian-Rayleigh equation with a singularity. Some new sufficient conditions for the existence of positive periodic solutions are obtained. The results have extended and improved the related reports in the literatures.

Key words: p -Laplacian-Rayleigh equation; positive periodic solution; singularity; coincidence degree

1 引言及引理

在微分方程和动力系统研究中, 具有奇性的微分方程周期正解的存在问题已受到人们极大的关注^[1-6], 如起源于电子学理论中的电子束 Brillouin 聚焦问题可转化为研究微分方程^[1-2]。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(1 + \cos 2x)y = \frac{1}{y} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(1 + \cos 2x)y = \frac{1}{y} + \frac{\varepsilon}{y^3} \quad (2)$$

周期正解的存在性。文献[3]研究了奇性微分方程

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(t, x(t)) = 0 \quad (3)$$

正周期解存在性, 其中 $f \in C(R, R)$;

$g \in C(R \times (0, +\infty), R)$ 是 L^2 -Caratheodory 函数, 对第一变元是 T 周期的且允许 $x \rightarrow 0^+$, $g(t, x)$ 无界。当 $x \rightarrow 0^+$, $g(t, x) \rightarrow -\infty$, 方程 (3) 是排斥型的; 当 $x \rightarrow 0^+$, $g(t, x) \rightarrow +\infty$, 方程 (3) 是吸引型的。

最近, 文献[4-5]分别研究了方程

$$x'' + f(x') + g(t, x) = 0 \quad (4)$$

$$(|x'|^{p-1} x')' + f(x') + g(t, x) = 0 \quad (5)$$

周期正解的存在问题。本文将用重合度定理, 研究一类较广泛的 p -Laplacian-Rayleigh 方程

$$(\varphi_p(x'(t)))' + f(x(t))x'(t) + h(t, x'(t)) + g(t, x(t)) = e(t) \quad (6)$$

收稿日期: 2016-04-17; 修改日期: 2016-04-23

基金项目: 广东省高等教育教学改革项目 (GDJG20142396); 韩山师范学院理科团队项目 (LT201202)

作者简介: 陈仕洲(1959-), 男, 广东汕头人, 副教授, 主要从事泛函微分方程理论及其应用研究(E-mail: chenshizhou@163.com)。

周期正解的存在性, 其中 $\varphi_p(x) = |x|^{p-2}x$, $p > 1, \varphi_p(0) = 0, f, e \in C(R, R)$ 是周期为 T 的函数, $h \in C(R^2, R), g \in C(R \times (0, +\infty), R)$, 且 h, g 对第一变元是周期为 T 的函数, 且允许 g 在 $x = 0$ 处具有奇性, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \inf_{t \in [0, T]} g(t, x) = \infty$ 。所得结果完善了文献[3]的结果, 包含、改进和推广了文献[4-5]的结果。

设 $u \in C(R, R), u(t+T) \equiv u(t)$ 。记

$$|u|_k = \left(\int_0^T |u(t)|^k dt \right)^{1/k}, |u|_\infty = \max_{t \in [0, T]} |u(t)|。$$

定义 $C_\tau^1 = \{u : u \in C^1(R, R), u(t+T) \equiv u(t)\}$, $\|u\| = \max\{|u|_\infty, |u|_\infty\}$, 则 $(C_\tau^1, \|u\|)$ 是一个 Banach 空间。

对于周期边值问题

$$(\varphi_p(x(t)))' = f^*(t, x, x') \quad (7)$$

其中 $f^* : [0, T] \times R \times R \rightarrow R$ 是 Caratheodory 函数。

引理 1^[6] (Manasevich-Mawhin) 设 $\Omega \subseteq C_\tau^1$ 是有界开集。若下列条件成立

(1) $\forall \lambda \in (0, 1)$, 边值问题

$$\begin{aligned} (\varphi_p(x(t)))' &= f^*(t, x, x'), \\ x(0) &= x(T), x'(0) = x'(T) \end{aligned}$$

在 $\partial\Omega$ 无解;

$$(2) \text{ 方程 } F(a) := \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t, a, 0) dt = 0$$

在 $\partial\Omega \cap R$ 无解;

$$(3) \deg\{F, \Omega \cap R, 0\} \neq 0。$$

则周期边值问题 (7) 在 $\bar{\Omega}$ 至少有一个周期解。

2 主要结论

定理 1 设条件

(A1) 存在常数 $0 < d_1 < d_2$ 使得:

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times (0, d_1), h(t, 0) + g(t, x) > e(t)$$

则 $\forall (t, x) \in [0, T] \times (d_2, +\infty), h(t, 0) + g(t, x) < e$;

$$(A2) \exists a, b \geq 0, 0 < k < p, s.t. |h(t, u)| \leq a|u|^k + b,$$

$\forall t \in [0, T], u \in R$ 被满足, 则方程 (6) 存在一个正

的 T -周期解。

证明 考虑 (6) 的同伦方程

$$\begin{aligned} & [\varphi_p(x'(t))] + \lambda f(x(t))x'(t) + \lambda h(t, x'(t)) + \\ & \lambda g(t, x(t-\sigma)) = \lambda e(t) \end{aligned} \quad (8)$$

令 $x(t_1) = \max_{t \in [0, T]} x(t), x(t_2) = \min_{t \in [0, T]} x(t), t_1, t_2 \in [0, T]$, 则

$$x'(t_1) = x'(t_2) = 0 \quad (9)$$

可以断定:

$$(\varphi_p(x(t)))'_{t=t_1} \leq 0, (\varphi_p(x(t)))'_{t=t_2} \geq 0 \quad (10)$$

如不然, 则 $(\varphi_p(x'(t)))'_{t=t_1} > 0$ 。注意到 $\varphi_p(x'(t_1)) = 0$,

易知 $\exists \sigma > 0, s.t. \varphi_p(x'(t)) > 0, \forall t \in (t_1, t_1 + \sigma)$,

从而 $x'(t) > 0, \forall t \in (t_1, t_1 + \sigma)$, 这与 $x(t_1) = \max_{t \in [0, T]} x(t)$ 矛盾。

同理可证 $(\varphi_p(x(t)))'_{t=t_2} \geq 0$ 。

由式 (8)-式 (10) 得

$$\begin{aligned} h(t, 0) + g(t, x(t_1)) - e(t_1) &\geq 0, \\ h(t, 0) + g(t, x(t_2)) - e(t_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

由 (A1), $x(t_1) \leq d_2, x(t_2) \geq d_1$ 。从而有

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], 0 < d_1 \leq x(t_2) \leq x(t) \leq x(t_1) \leq d_2 \\ 0 < d_1 \leq |x|_\infty \leq d_2 \end{aligned} \quad (11)$$

由方程 (8) 两边同乘以 $x(t)$, 并在区间 $[0, T]$ 上积分即得

$$\begin{aligned} \int_0^T |x'(t)|^p dt &= \lambda \int_0^T h(t, x'(t))x(t) dt + \\ & \lambda \int_0^T (g(t, x(t)) - e(t))x(t) dt \leq \\ \int_0^T |h(t, x'(t))x(t)| dt &+ \int_0^T |(g(t, x(t)) - e(t))x(t)| dt \leq \\ ad_2 \int_0^T |x'(t)|^k dt &+ TGd_2 + (b + |e|_\infty)Td_2 \leq \\ ad_2 T^{\frac{p-k}{p}} |x'|_p^k &+ TGd_2 + (b + |e|_\infty)Td_2 \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$G := \max\{|g(t, u) - e(t)| : t \in [0, T], |u| \leq d_2\} \quad (13)$$

由 (12) 知, $\exists c_1 > 0, s.t. |x'|_p^p \leq c_1$, 由于 $x(0) = x(T)$,

知 $\exists t_0 \in [0, T], s.t. x'(t_0) = 0$ 。于是

$$\begin{aligned} \varphi_p(x'(t)) &= \int_{t_0}^t [\varphi_p(x'(s))] ds = -\lambda \int_{t_0}^t f(x(s)) x'(s) ds - \text{定义 } r(x) = x - \frac{q_1 + q_2}{2}, \text{ 则 } r(q_1) < 0, r(q_2) > 0. \\ &\lambda \int_{t_0}^t h(s, x'(s)) ds - \lambda \int_{t_0}^t g(t, x(t)) ds + \lambda \int_{t_0}^t e(s) ds \\ |x'(t)|^{p-1} &= \left| \int_{t_0}^t [\varphi_p(x'(s))] ds \right| \leq \int_0^T |f(x(s))| |x'(s)| ds + \\ &\int_0^T |h(s, x'(s))| ds + \int_0^T |g(s, x(s)) - e(s)| ds \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T |f(x(s))| |x'(s)| ds &\leq \int_0^T |x'(s)| ds \leq \\ c_2 T^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T |x'(s)| ds \right)^{\frac{1}{p}} &\leq c_2 T^{\frac{1}{q}} c_1^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $c_2 = \max \{ |f(u)| : |u| \leq d_2 \}$,

$$\begin{aligned} \int_0^T |h(s, x'(s))| ds &\leq a \int_0^T |x'(s)|^k ds + bT \leq \\ a T^{\frac{p-k}{p}} |x'|_p^k + bT &\leq a T^{\frac{p-k}{p}} c_1^{\frac{k}{p}} + bT \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int_0^T |g(s, x(s)) - e(s)| ds \leq GT \quad (17)$$

由式(14) - 式(17) 得

$$|x'|_{\infty}^{p-1} \leq c_2 T^{\frac{1}{q}} c_1^{\frac{1}{p}} + a T^{\frac{p-k}{p}} c_1^{\frac{k}{p}} + bT + GT \quad (18)$$

由(18), $\exists M_2 > 0, s.t. |x'|_{\infty} \leq M_2$. 取 $0 < q_1 < \frac{1}{2} d_1$,

$q_2 > d_2, q_3 > M_2$, 令

$$\Omega = \{x \in C^1 : q_1 < x(t) < q_2, |x'(t)| < q_3, \forall t \in [0, T]\}$$

则 $\Omega \subseteq X$ 是有界开集。

显然 $\forall \lambda \in (0, 1)$, 方程(8) 在 $\partial\Omega$ 无解。

其次, $\forall x \in \partial\Omega \cap R, x(t) = q_1$ (or q_2), 由(A1)有

$$F(q_1) = -\frac{1}{T} \int_0^T [h(t, 0) + g(t, q_1) - e(t)] dt < 0,$$

$$\text{or } F(q_2) = -\frac{1}{T} \int_0^T [h(t, 0) + g(t, q_2)] dt > 0.$$

$$\forall x \in \Omega \cap R, x(t) = c, q_1 < c < q_2.$$

$$F(x) = -\frac{1}{T} [h(t, 0) + g(t, c) - e(t)] dt$$

定义同伦映射:

$$\begin{aligned} H(\mu, x) &= \mu r(x) + (1 - \mu) F(x), (\mu, x) \in \\ &[0, 1] \times (\partial\Omega \cap R). \end{aligned}$$

$$H(\mu, q_1) = \mu r(q_1) + (1 - \mu) F(q_1) < 0,$$

$$H(\mu, q_2) = \mu r(q_2) + (1 - \mu) F(q_2) > 0$$

因此 $H(\mu, x) \neq 0$, $\deg\{F, \Omega \cap R, 0\} =$

$$\deg\{H(0, \cdot), \Omega \cap R, 0\} = \deg\{H(1, \cdot), \Omega \cap R, 0\} = 1,$$

根据引理1, 方程(6) 有一个正 T -周期解 $x(t)$ 。

注记1 在方程(6) 中, 令 $p=2, h=0, e=0$, 则为文[3]所研究的方程, 定理1 完善了文献[3]的结果; 令 $f=0, e=0$, 易知本文定理1 包含、改进和推广了文献[4-5]的结果。

参考文献:

- [1] 丁同仁. 关于周期性Brillouin电子束聚焦系统的一个边值问题[J]. 北京大学学报:自然科学版, 1965(1): 31-38.
- [2] 叶彦谦, 王现. 电子注聚焦理论中所出现的非线性微分方程[J]. 应用数学学报, 1978(1): 13-41.
- [3] Zhang M. Periodic solutions of Liénard equations with singular forces of repulsive type [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, 203: 254-269.
- [4] 高亚静, 陶诏灵. 一类p-Laplacian-Rayleigh 方程周期正解的存在性[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2015, 32(5): 630-634.
- [5] 钟涛, 鲁世平. 一类具有奇性Rayleigh 方程周期正解的存在性[J]. 扬州大学学报:自然科学版, 2015, 18(2): 18-21.
- [6] Manasevich R, Mawhin J. Periodic Solutions for Nonlinear Systems with p-Laplacian-Like Operators[J]. Journal of Differential Equations, 1998, 145(2): 367-393.