文章编号: 1000-8152(2004)04-0517-04

时变不确定广义系统的鲁棒无源控制

董心壮, 张庆灵
(东北大学 理学院,辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究了除 E 外其余系数矩阵均含有范数有界时变不确定性的广义系统的鲁棒无源控制器设计问题.利用线性矩阵不等式方法,首先给出自治系统广义二次稳定且无源的充分条件;然后给出状态反馈鲁棒无源控制器的存在条件并用线性矩阵不等式的解构造了相应的控制器;随后以矩阵不等式的形式得到了动态输出反馈鲁棒无源控制器的存在条件,同时利用矩阵不等式的解给出相应控制器的设计方法;最后举例说明了所提出方法的可行性.

关键词: 不确定广义系统; 广义二次稳定; 无源控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码:** A

Robust passive control for singular systems with time-varying uncertainties

DONG Xin-zhuang, ZHANG Qing-ling
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The problem of designing robust passive controllers is addressed for a singular system in which all coefficient matrices except E contain norm-bounded time-varying uncertainties. Using the method of linear matrix inequality (LMI), a sufficient condition was firstly presented for the unforced system to be generalized quadratically stable and passive. Then the existence condition of a state feedback robust passive controller was given and the explicit expression of the controller was derived in terms of the solution of LMIs. Furthermore, the existence condition of a dynamic output feedback robust passive controller was shown by means of matrix inequalities, and the design method of the controller was also given via solving matrix inequalities. Finally, an example was given to illustrate the validity of the proposed methods.

Key words: uncertain singular system; generalized quadratic stability; passive control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

耗散性理论在系统稳定性研究中起着重要的作用.其本质含义是存在一个非负的能量函数(即存储函数),使得系统的能量损耗总小于能量的供给率.而无源性则是耗散性的一个重要方面,它将输入输出的乘积作为能量的供给率,体现了系统在有界输入条件下能量的衰减特性.事实上,基于 Lyapunov 函数的镇定理论,也可以从无源性的角度加以解释,可以说,无源性是稳定性的一种更高层次的抽象.近年来,许多学者在无源性理论方面做了大量的工作.冯纯伯等[1,2]讨论了非线性系统的无源性问题,取得了许多开创性成果,文献[3,4]则考虑了正常系统的无源控制问题,但关于广义系统的无源控制,还未见报道.本文考虑时变不确定广义系统的鲁棒无源控制问题,目的是分别设计状态反馈和动态输出反馈控制器,以保证闭环系统是广义二次稳定的,且从外部输入到被调输出之间是无源的.

2 鲁棒无源性分析(Robust passivity analysis)

考虑如下时变不确定广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A+\Delta A(t))x(t)+(B_1+\Delta B_1(t))\omega(t)+ \\ \qquad (B_2+\Delta B_2(t))u(t), \\ z(t) = (C_1+\Delta C_1(t))x(t)+(D_1+\Delta D_1(t))\omega(t)+ \\ \qquad (D_2+\Delta D_2(t))u(t), \\ y(t) = (C_2+\Delta C_2(t))x(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态; $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制输入; $\omega(t)\in\mathbb{R}^p$ 是外部输入,且 $\omega(t)\in L_2[0,\infty)$; $z(t)\in\mathbb{R}^p$ 是被调输出; $y(t)\in\mathbb{R}^l$ 是测量输出; $E,A,B_1,B_2,C_1,D_1,D_2,C_2$ 是适当维数的已知实常数矩阵; $\mathrm{rank}E=$

收稿日期:2002-12-24; 收修改稿日期:2003-11-19.

$r < n$;$\Delta A(t)$,$\Delta B_1(t)$,$\Delta B_2(t)$,$\Delta C_1(t)$,$\Delta D_1(t)$,$\Delta D_2(t)$,$\Delta C_2(t)$ 是时变不确定实矩阵函数,且具有以下的形式:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta B_1(t) & \Delta B_2(t)\\ \Delta C_1(t) & \Delta D_1(t) & \Delta D_2(t)\\ \Delta C_2(t) & * & *\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}H_1\\ H_2\\ H_3\end{bmatrix} F(t)[E_1\ E_2\ E_3],\\ F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I.\end{cases} \tag{2}$$

其中 H_1,H_2,H_3,E_1,E_2,E_3 是适当维数的实常数矩阵."$*$"代表与本文无关的矩阵,$F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$ 是一个具有 Lebesgue 可测元的不确定矩阵函数.满足式(2)的不确定性称为是允许的不确定性.

先对系统(1)的自治系统(即令 $u(t) \equiv 0$)进行鲁棒无源性分析.为简化叙述,引进记号

$\hat{A}(t) = A + \Delta A(t)$, $\hat{B}_1(t) = B_1 + \Delta B_1(t)$,

$\hat{C}_1(t) = C_1 + \Delta C_1(t)$, $\hat{D}_1(t) = D_1 + \Delta D_1(t)$.

定义 1[5] 对于系统(1)的自治系统,如果当 $\omega(t) \equiv 0$ 时,系统对于所有允许的 $\Delta A(t)$ 都是正则、稳定、无脉冲的,则称系统(1)的自治系统是鲁棒稳定的.

定义 2 对于系统(1)的自治系统,如果存在可逆矩阵 P,使得不等式

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0,\ \hat{A}^{\mathrm{T}}(t)P + P^{\mathrm{T}}\hat{A}(t) < 0$$

对于所有允许的 $\Delta A(t)$ 成立,则称系统(1)的自治系统是广义二次稳定的.

定义 3 对于系统(1)的自治系统,如果存在可微非负定函数 $V(x(t))$,使得无源性不等式

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant \omega^{\mathrm{T}}(t)z(t),\ \forall t \geqslant 0$$

对于任意的输入信号 $\omega(t) \in L_2[0,\infty)$ 和所有允许的不确定性成立,则称系统(1)的自治系统是无源的.

引理 1[5] 如果系统(1)的自治系统是广义二次稳定的,则它也是鲁棒稳定的.

注 1 从上述定义可知,广义二次稳定是对不确定广义系统内部性能的要求,而无源性则是对系统外部性能的要求.

引理 2 对于系统(1)的自治系统,如果存在可逆矩阵 P,使得不等式

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \tag{3}$$

$$L = \begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}(t)P + P^{\mathrm{T}}\hat{A}(t) & P^{\mathrm{T}}\hat{B}_1(t) - \hat{C}_1^{\mathrm{T}}(t)\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}(t)P - \hat{C}_1(t) & -\hat{D}_1(t) - \hat{D}_1^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

对于所有允许的不确定性成立,则系统(1)的自治系统是广义二次稳定且无源的.

证 当式(3),(4)成立时,显然系统(1)的自治系统是广义二次稳定的.令 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}Px(t)$,则 $V(x(t)) \geqslant 0$,且计算可得当式(4)成立时,有 $\dot{V}(x(t)) \leqslant 2\omega^{\mathrm{T}}(t)z(t)$,此时取 $V_1(x(t)) = \frac{1}{2}V(x(t))$ 就能满足定义3,所以系统(1)的自治系统是无源的.

引理 3[6] 给定适当维数的矩阵 Q,H,M,其中 Q 对称,则

$$Q + HFM + M^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0 \tag{5}$$

对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的 F 成立,当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$ 满足

$$Q + \varepsilon HH^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}M^{\mathrm{T}}M < 0. \tag{6}$$

由引理2和引理3,可以得到下面的定理.

定理 1 如果存在常数 $\alpha > 0$ 和可逆矩阵 P 满足式(3)以及下式

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A & P^{\mathrm{T}}B - C^{\mathrm{T}} & \alpha E_1^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}H_1\\ B^{\mathrm{T}}P - C & -D - D^{\mathrm{T}} & \alpha E_2^{\mathrm{T}} & -H_2\\ \alpha E_1 & \alpha E_2 & -\alpha I & 0\\ H_1^{\mathrm{T}}P & -H_2^{\mathrm{T}} & 0 & -\alpha I\end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

则系统(1)的自治系统是广义二次稳定且无源的.

证 式(4)可以写成式(5)的形式,其中

$$Q = \begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A & P^{\mathrm{T}}B - C^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}}P - C & -D - D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix}P^{\mathrm{T}}H_1\\ -H_2\end{bmatrix},\ M = [E_1\quad E_2].$$

而式(5)成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,使得式(6)成立.对式(6)利用 Schur 补性质,经过适当的矩阵等价变换并记 $\alpha = \varepsilon^{-1}$,即可得到式(7).

3 鲁棒无源控制(Robust passive control)

鲁棒无源控制问题就是对系统(1)设计控制器,保证闭环系统对于所有允许的不确定性都是广义二次稳定且无源的,相应的控制器称为鲁棒无源控制器.

首先考虑状态反馈鲁棒无源控制器 $u(t) = Kx(t)$ 的存在条件和设计方法.

定理 2 如果存在常数 $\varepsilon > 0$,可逆矩阵 X 及矩阵 Y 满足

$$EX = X^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} AX + B_2Y + X^TA^T + Y^TB_2^T & B_1 - X^TC^T - Y^TD_2^T & X^TE_1^T + Y^TE_3^T & \varepsilon H_1 \\ B_1^T - CX - D_2Y & -D_1 - D_1^T & E_2^T & -\varepsilon H_2 \\ E_1X + E_3Y & E_2 & -\varepsilon I & 0 \\ \varepsilon H_1^T & -\varepsilon H_2^T & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

则系统(1)存在状态反馈鲁棒无源控制器,而且控制器可设计为 $u(t) = YX^{-1}x(t)$.

证　对闭环系统应用定理1,经过适当的矩阵等价变换,并记 $P^{-1} = X, KP^{-1} = Y$ 即可得到式(8),(9),并由此得到控制器的表达式.

再考虑动态输出反馈鲁棒无源控制器的设计方法.设广义动态输出反馈控制器的形式为

$$\begin{aligned} E\dot{x}_c(t) &= A_cx_c(t) + B_cy(t), \\ u(t) &= C_cx_c(t). \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ 是控制器的状态,矩阵 E 与系统(1)中的矩阵 E 相同.则相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A} + \bar{H}_1\bar{F}(t)\bar{E}_1)\bar{x}(t) + \\ \qquad (\bar{B}_1 + \bar{H}_1\bar{F}(t)\bar{E}_2)\omega(t), \\ z(t) = (\bar{C}_1 + \bar{H}_2\bar{F}(t)\bar{E}_1)\bar{x}(t) + \\ \qquad (\bar{D}_1 + \bar{H}_2\bar{F}(t)\bar{E}_2)\omega(t). \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},\ \bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix},\ \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_1 = [C_1 \quad D_2C_c],\ \bar{D}_1 = D_1,$$

$$\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & B_cH_3 \end{bmatrix},\ \bar{H}_2 = [H_2 \quad 0],$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_1 = \begin{bmatrix} E_1 & E_3C_c \\ E_1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} E_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由定理1,系统(11)是广义二次稳定且无源的,如果存在正数 ε 和可逆矩阵 $\bar{P}$ 满足

$$\bar{E}^T\bar{P} = \bar{P}^T\bar{E} \geqslant 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T\bar{P} + \bar{P}^T\bar{A} & \bar{P}^T\bar{B}_1 - \bar{C}_1^T & \bar{E}_1^T & \bar{P}^T\bar{H}_1 \\ \bar{B}_1^T\bar{P} - \bar{C}_1 & -\bar{D}_1 - \bar{D}_1^T & \bar{E}_2^T & -\bar{H}_2 \\ \bar{E}_1 & \bar{E}_2 & -\varepsilon I & 0 \\ \bar{H}_1^T\bar{P} & -\bar{H}_2^T & 0 & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

现在从式(12),(13)出发讨论求解控制器(10)系数矩阵的方法.

设 $\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ 与 $\bar{E}$ 的分块相同.不妨设 Q_{21} 可逆,记 $\Pi = \begin{bmatrix} Q_{11} & I \\ Q_{21} & 0 \end{bmatrix}$,显然它是可逆的,且 $P\Pi = \begin{bmatrix} I & P_{11} \\ 0 & P_{21} \end{bmatrix}$.对式(12)分别左乘 Π^T 右乘 Π,则式(12)等价于下面两式:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & I \\ I & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^T & I \\ I & P_{11}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^T & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{14}$$

$$E = Q_{11}^TE^TP_{11} + Q_{21}^TE^TP_{21}. \tag{15}$$

对式(13)分别左乘 $S = \mathrm{diag}(\Pi^T, I, I, I)$ 右乘 S^T,并定义新变量

$$\hat{A} = P_{11}^TAQ_{11} + P_{21}^TB_cC_2Q_{11} + P_{11}^TB_2C_cQ_{21} + P_{21}^TA_cQ_{21},$$

$$\hat{B} = P_{21}^TB_c,\ \hat{C} = C_cQ_{21}.$$

则式(13)等价于下式:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & Q_{11}^TE_1^T & \varepsilon H_1 & 0 \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & E_1^T & E_1^T & \varepsilon P_{11}^TH_1 & \varepsilon\hat{B}H_3 \\ \Sigma_{13}^T & \Sigma_{23}^T & \Sigma_{33} & E_2^T & 0 & -\varepsilon H_2 & 0 \\ \Sigma_{14}^T & E_1 & E_2 & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ E_1Q_{11} & E_1 & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ \varepsilon H_1^T & \varepsilon H_1^TP_{11} & -\varepsilon H_2^T & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon H_3^T\hat{B}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

其中

$$\Sigma_{11} = AQ_{11} + B_2\hat{C} + Q_{11}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + \hat{C}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_{12} = A + \hat{A}^{\mathrm{T}},\ \Sigma_{13} = B_1 - Q_{11}^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} - \hat{C}^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_{14} = Q_{11}^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}} + \hat{C}^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_{22} = A^{\mathrm{T}}P_{11} + P_{11}^{\mathrm{T}}A + \hat{B}C_2 + C_2^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_{23} = P_{11}^{\mathrm{T}}B_1 - C_1^{\mathrm{T}},\ \Sigma_{33} = -D_1 - D_1^{\mathrm{T}}.$$

由此得到如下的定理.

定理 3 如果存在正数 ε 和矩阵 $P_{11}, Q_{11}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 满足不等式(14),(16),则系统(1)存在动态输出反馈鲁棒无源控制器(10),而且控制器(10)的系数矩阵可取为

$$A_c = P_{21}^{-\mathrm{T}}(\hat{A} - P_{11}^{\mathrm{T}}AQ_{11} - \hat{B}C_2Q_{11} - P_{11}^{\mathrm{T}}B_2\hat{C})Q_{21}^{-1},$$

$$B_c = P_{21}^{-\mathrm{T}}\hat{B},\ C_c = \hat{C}Q_{21}^{-1}.$$

这里,可逆矩阵 P_{21}, Q_{21} 由限制条件(15)决定.

注 2 由于矩阵 P_{21}, Q_{21} 只要满足限制条件(15)即可,故总可以选择使其为可逆矩阵.

注 3 不等式(16)关于 ε 不是线性的,解决方法是可以先给 ε 赋值,再求解线性不等式(16).

4 算例(Example)

考虑不确定广义系统(1),其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0\quad 1],\ C_2 = [2\quad 0],$$

$$D_1 = [8],\ D_2 = [4],$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ H_2 = [0.1\quad 1.4],$$

$$H_3 = [0.8\quad 0.3],\ E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

令 $\varepsilon = 1$,利用 MATLAB 的 LMI 工具箱求解不等式(14),(16),得到一组可行解为

$$P_{11} = Q_{11} = \begin{bmatrix} 0.4848 & 0 \\ -0.1652 & -0.4167 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1.6774 & -0.9445 \\ -0.8758 & -2.8495 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -0.1793 \\ 0.1624 \end{bmatrix},\ \hat{C} = [-0.1745\quad 0.4647].$$

则系统(1)存在动态输出反馈鲁棒无源控制器(10),而且若取 $P_{21} = \begin{bmatrix} 0.7650 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,可得到控制器(10)的系数矩阵分别为

$$A_c = \begin{bmatrix} 3.2696 & -1.5939 \\ -1.0378 & -3.3703 \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} -0.2344 \\ 0.1624 \end{bmatrix},$$

$$C_c = [-0.1745\quad 0.4647].$$

5 结论(Conclusion)

研究了不确定广义系统的鲁棒无源控制问题.基于线性矩阵不等式,首先得到自治系统广义二次稳定且无源的充分条件,在此基础上,分别设计了状态反馈和动态输出反馈鲁棒无源控制器,保证闭环系统具有上述性能.研究结果表明,不确定广义系统的鲁棒无源控制器设计问题可以转化为带有某个正参数的线性矩阵不等式组的求解问题.

参考文献(References):

[1] 冯纯伯.应用无源性研究时变非线性系统的稳定性[J].自动化学报,1997,23(6):775-781.
(FENG Chunbo. Stability analysis for time-varying nonlinear systems via passive analysis [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(6): 775-781.)

[2] 冯纯伯,张侃健,费树岷.基于无源性分析的鲁棒控制系统设计[J].自动化学报,1999,25(5):577-582.
(FENG Chunbo, ZHANG Kanjian, FEI Shumin. Passive-based design of robust control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 577-582.)

[3] 俞立,潘海天.具有时变不确定线性系统的鲁棒无源控制[J].自动化学报,1998,24(3):368-372.
(YU Li, PAN Haitian. Robust passive control of linear systems with time-varying uncertain parameters [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(3): 368-372.)

[4] 关新平,龙承念,段广仁.离散时滞系统的鲁棒无源控制[J].自动化学报,2002,28(1):146-149.
(GUAN Xinping, LONG Chengnian, DUAN Guangren. Robust passive control for discrete time-delay systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(1): 146-149.)

[5] XU S Y, YANG C W. An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems [J]. *Int J of Systems Science*, 2000, 31(1): 55-61.

[6] XIE L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741-751.

作者简介:

董心壮 (1973 —),女,1994 年毕业于解放军信息工程学院,1998 年于郑州解放军电子技术学院获军事学硕士学位,现为东北大学信息科学与工程学院博士研究生,沈阳炮兵学院讲师,目前主要从事广义系统的 H_∞ 控制、无源控制等方面的研究,E-mail: xzdong@hotmail.com;

张庆灵 (1956 —),男,1995 年于东北大学获博士学位,1997 年完成西北工业大学博士后工作,现为东北大学理学院院长,教授,博士生导师,主要研究领域为广义系统、鲁棒控制、分散控制等.