

无限时间长时延网络控制系统的随机最优控制

朱其新^{1,2}, 胡寿松¹, 刘 亚¹

(1. 南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016; 2. 南通工学院 自动化系, 江苏 南通 226007)

摘要: 考虑二次性能指标下线性网络控制系统的随机最优控制问题, 建立了控制器为事件驱动时长时延线性网络控制系统的数学模型, 证明了在无限时间情况下离散随机黎卡提代数方程解的存在性, 设计出无限时间情况下线性网络控制系统的随机最优控制器, 得到相应的最优性能指标的表达式, 并证明了相应的随机最优控制器可使网络控制系统均方指数稳定. 最后以网络控制下的倒立摆为对象进行仿真研究, 仿真结果表明该方法的正确性和有效性.

关键词: 网络控制系统; 事件驱动; 最优控制; 均方指数稳定

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Infinite time stochastic optimal control of networked control systems with long delay

ZHU Qi-xin^{1,2}, HU Shou-song¹, LIU Ya¹

(1. College of Automatic Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China;

2. Department of Automation, Nantong Institute of Technology, Nantong Jiangsu 226007, China)

Abstract: The stochastic optimal control problem was considered in case of linear networked control systems and quadratic criteria. The mathematic model of linear networked control systems with long delay is set up when the controller is event driven. It is proved that the solution of infinite horizon discrete time stochastic algebraic Riccati equation is existent. The infinite horizon stochastic optimal controller of linear networked control systems is designed. The expression of optimal performance index of networked control systems is given. The paper proves that the infinite horizon stochastic optimal controller of networked control systems can render the networked control systems exponentially mean square stable. Finally, the simulation based on the networked controlled inverted pendulum is studied. The simulation results show the proposed methods are feasible and effective.

Key words: networked control systems; event driven; optimal control; exponentially mean square stable

1 引言(Introduction)

通过网络形成闭环的实时控制系统称为网络控制系统(networked control systems, 简称 NCS). NCS 的特征是系统各组件(传感器、控制器和作动器等)之间可以通过网络交换信息. 网络控制系统相比于传统的点对点结构的控制系统具有诸多优点, 如提高了系统的可靠性和灵活性、可以实现远程操作与维护、减少了系统的成本和易于安装和维护等. 因而网络控制系统正成为人们研究的一个热点, 并引起了越来越多学者的广泛兴趣^[1-3].

将通讯网络引入控制系统使分析和设计变得非常困难, 当 NCS 各组件之间通过网络传输信息时必然会引起网络诱导时延(包括传感器-控制器时延

τ_{sc}^k 和控制器-执行器时延 τ_{ca}^k), 会降低系统性能甚至引起系统不稳定. NCS 的模型是 NCS 的分析和控制器设计的基础, 文献[4]建立了网络诱导时延小于一个采样周期时 NCS 的模型, 但网络诱导时延小于一个采样周期这一假设在实际的 NCS 中常常不能满足; 文献[5]建立了传感器和控制器皆为时钟驱动时集成通讯控制系统(类似于 NCS)的数学模型, 但其没有考虑控制器为事件驱动的情况及系统中的噪声. 本文建立了控制器为事件驱动时长时延线性 NCS 的数学模型, 在模型中考虑了系统噪声和观测噪声.

关于 NCS 的随机最优控制问题, 已有的文献都只讨论了有限时间情况下 NCS 的随机最优控制问

题,关于无限时间网络控制系统的随机最优控制问题的研究尚未见报道.文献[6]讨论了网络诱导时延小于一个采样周期时有限时间 NCS 的随机最优控制问题,但其所得到的控制律太复杂.在 NCS 中,因为网络诱导时延的分布特性是非时变的,所以可以考虑 NCS 无限时间的最优控制问题.本文讨论了长时延 NCS 的无限时间随机最优控制律的设计方法,得到了最优性能指标的表达式.

NCS 的稳定性问题是 NCS 研究中的基本问题,文献[1]讨论了 NCS 的稳定域并利用混合系统的分析方法分析了 NCS 的稳定性.文献[7]讨论了网络采样间隔对 NCS 稳定性的影响,并指出对一不考虑时延本来稳定的系统,当网络被加到控制系统之后,只要网络采样间隔小于某一确定值时,NCS 依然稳定.本文证明了无限时间随机最优状态反馈控制律均可使长时延 NCS 均方指数稳定.

2 符号(Denotation)

本文所用的一些符号意义如下:

h, i, j, k, l, m, n 表示非负整数; $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的欧几里德空间,在该空间内,内积 $(x, y) = x^T y$, 范数 $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$; 用 M^n 表示 n 维对称方阵所张成的 Banach 空间; $(\cdot)^{ij}$ 表示括号内的分块矩阵的相应位置的分块; $\{a_i\}$ 表示矩阵或向量序列 $a_0, a_1, \dots$; θ 表示零向量或零矩阵, κ^n 表示所有 n 维线性变换 $\zeta: M^n \rightarrow M^n$ 所张成的 Banach 空间,其中的线性变换 ζ 的范数定义为 $\|\zeta\| = \max_{\|X\|=1} \|\zeta X\|$.

3 控制器为事件驱动时长时延 NCS 的建模 (Modeling of NCS with long delay when the controller is event driven)

假设 NCS 中的被控对象为线性时不变系统,考

虑系统中的噪声,其可表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t), \\ y(t) = Cx(t) + w(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^q, A, B, C$ 为适维矩阵, $v(t)$ 和 $w(t)$ 为零均值白噪声向量.由于网络诱导时延有界,可以假设 $0 \leq \tau < hT$ (其中 $h > 1, h$ 为整数),在作动器为事件驱动的情况下,在一个采样周期 $[kT, (k+1)T)$ 内加到被控对象上的控制量 $u(t)$ 分段连续,且最多有 $h+1$ 个不同的值,假设在采样周期 $[kT, (k+1)T)$ 内, $u(t)$ 的变化发生在随机瞬时 $kT + t_i^k, i = 0, 1, \dots, h$ 且 $t_i^k > t_{i+1}^k, t_{-1}^k = T, t_h^k = 0$, 如图1所示.由于控制器为事件驱动,因此可以用 u_{X_k} 表示传感器信号 X_k 到达控制器时控制器所产生的输出.对系统(1)在 $[kT, (k+1)T)$ 内积分可得其离散状态方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_s x_k + \sum_{i=0}^h B_i^k u_{X_{k-i}} + v_k, \\ y_k = Cx_k + w_k. \end{cases} \quad (2)$$

若将 u_{X_k} 简记为 u_k , 则系统(2)又可表示为

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_s x_k + \sum_{i=0}^h B_i^k u_{k-i} + v_k, \\ y_k = Cx_k + w_k. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$x_k = x(kT), y_k = y(kT), u_k = u(kT).$$

$$A_s = e^{AT}, B_i^k = \int_{t_i^k}^{t_{i-1}^k} e^{A(T-s)} ds B \text{ 且 } t_{-1}^k = T, t_h^k = 0,$$

$$v_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-s]} v(s) ds, w_k = w(kT).$$

由于 $v(t)$ 和 $w(t)$ 为零均值白噪声向量,易知 v_k, w_k 依然为零均值白噪声向量,且 $E(v_k v_k^T) = R_1 \geq 0, E(w_k w_k^T) = R_2 > 0$.

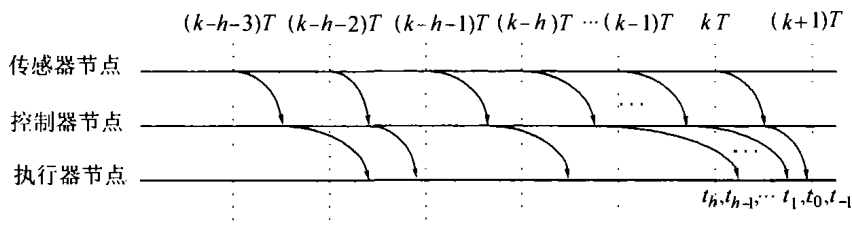


图1 NCS 中信号传输的时间序列图

Fig.1 Timing diagram of signals transmitting in NCS

注1 模型(2)为原连续系统的状态方程在各个采样周期内离散化状态方程的最一般的形式,在 k 为不同值时 $t_0^k, \dots, t_{h-1}^k$ 中有一部分为 0, 也即 $B_0^k, \dots, B_{h-1}^k$ 中有一部分为 θ . 当 $h = 1$ 时即为网络诱导时延小于一个采样周期时的模型,也即文献[4]的模型.

为研究问题的方便,本文只考虑 NCS 中的时延而不考虑 NCS 中数据包丢失和数据包次序错乱问题,并作以下合理的假设:

假设1 传感器为时钟驱动,控制器和执行器

皆为事件驱动;

假设 2 网络诱导时延有界且服从某一确定分布;

假设 3 随机序列 $\{v_k\}, \{w_k\}, \{t_i^k\}$ 全为独立同分布序列且两两之间相互独立.

4 有限时间 NCS 的随机最优控制 (Finite horizon optimal control of NCS)

对于有限时间 NCS 的随机最优控制,本文讨论使下列性能指标极小的控制律的设计:

$$J_N = E\{x_N^T Q_0 x_N + \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q_1 x_k + u_k^T Q_2 u_k]\}. \quad (4)$$

其中 Q_0 为对称非负定阵, Q_1, Q_2 为对称正定阵.

引理 1^[8] 当系统(3)具有完全状态信息时,使性能指标(4)极小的控制律由下式给出:

$$u_k = -L_k [u_k^T \quad u_{k-1}^T \quad \cdots \quad u_{k-h}^T]^T, \quad (5)$$

且最优性能指标为

$$J^* = J_0 = x_0^T S_0^{-1} x_0 + \sum_{k=1}^N \text{tr}(S_k^{-1} R_1).$$

其中

$$L_k = (Q_2' + E\{\Gamma_k^T S_{k+1} \Gamma_k\})^{-1} E\{\Gamma_k^T S_{k+1} \Phi_k\}, \quad (6)$$

$$S_k = E[(\Phi_k - \Gamma_k L_k)^T S_{k+1} (\Phi_k - \Gamma_k L_k)] + L_k^T Q_2' L_k + Q_1', \quad S_N = Q_0', \quad (7)$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} A_s & B_1^k & B_2^k & \cdots & B_{h-1}^k & B_h^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} B_0^k \\ I_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} Q_0' = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (h/h+1)Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1/h+1)Q_2 \end{bmatrix}, \\ Q_1' = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [1/(h+1)]Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [1/(h+1)]Q_2 \end{bmatrix}, \\ Q_2' = \frac{1}{h+1}Q_2. \end{cases} \quad (9)$$

由于在系统(3)的状态方程中同时含有 $u_{-1}, \dots, u_{-h}$, 所以可引入向量 $z_k = [u_k^T \quad u_{k-1}^T \quad \cdots \quad u_{k-h}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+hm}$, 则系统(3)可表示为

$$\begin{cases} z_{k+1} = \Phi_k z_k + \Gamma_k u_k + H v_k, \\ y_k = C_0 z_k + w_k. \end{cases} \quad (10)$$

其中 $H = [I_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T, C_0 = [C \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \Phi_k, \Gamma_k$ 的定义如式(8)所示. 而性能指标(4)又等价于

$$J_N = E\{z_N^T Q_0' z_N + \sum_{k=0}^{N-1} [z_k^T Q_1' z_k + u_k^T Q_2' u_k]\}. \quad (11)$$

其中 Q_0', Q_1', Q_2' 的定义如式(9)所示. 由于 Q_0 为对称非负定阵, Q_1, Q_2 为对称正定阵, 所以 Q_0' 为对称非负定阵, Q_1', Q_2' 为对称正定阵.

若系统的确定性控制律为 $u_k = -L_k z_k$, 则系统(10)又可表示为

$$\begin{cases} z_{k+1} = (\Phi_k - \Gamma_k L_k) z_k + H v_k = \Psi_{L,k} z_k + H v_k, \\ y_k = C_0 z_k + w_k. \end{cases} \quad (12)$$

5 无限时间 NCS 的随机最优控制 (Infinite horizon stochastic optimal control of NCS)

对于无限时间 NCS 的随机最优控制,本文讨论使下列性能指标极小的最优控制律的设计:

$$J_\infty = E\{\sum_{k=0}^{\infty} [x_k^T Q_1 x_k + u_k^T Q_2 u_k]\}. \quad (13)$$

其中 Q_1, Q_2 为对称正定阵. 该性能指标又等价于下列性能指标:

$$J_\infty = E\{\sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T Q_1 z_k + u_k^T Q_2' u_k]\}. \quad (14)$$

为研究无限时间 NCS 的随机最优控制,引入线性变换 $\zeta_L, \xi_L, \xi_*: M^{n+hm} \rightarrow M^{n+hm}$ 并定义如下:

$$\zeta_L X = E\{\Psi_{L,0}^T X \Psi_{L,0}\}, X \in M^{n+hm}, \quad (15a)$$

$$\xi_L X = \zeta_L X + Q_1' + L^T Q_2' L, X \in M^{n+hm}, \quad (15b)$$

$$\xi_* X = \xi_{LX} X, X \in M^{n+hm}. \quad (15c)$$

其中

$$L_X = (Q_2' + E(\Gamma_0^T X \Gamma_0))^{-1} E(\Gamma_0^T X \Phi_0).$$

在系统(10)的离散状态方程中,由于 $u_k = -L_k z_k$ 为确定性控制律,即 L_k 为确定性矩阵,故显然知 z_k 只与 $z_j, \Phi_j, \Gamma_j, v_j, j < k$ 及其他常数矩阵有关,又因为 $\{\Phi_k\}, \{\Gamma_k\}, \{v_k\}$ 全为独立同分布序列,所以 $k \leq l$ 时, z_k 与 Φ_l, Γ_l, L_l 独立, z_k 也与 $\Psi_{L,l}$ 独立. 此时引出以下引理.

$$\text{引理 2} \quad E(z_i^T X z_i) = z_0^T \zeta_L^i X z_0 + \sum_{j=0}^i \text{tr}[(\zeta_L^j X)^T R_1].$$

证 因 $\Psi_{L,k} = \Phi_k - \Gamma_k L_k$, 且 L_k 为确定性矩阵, 又因为 $\{\Phi_k\}, \{\Gamma_k\}$ 全为独立同分布序列, 所以

$$E\{\Psi_{L,k}^T X \Psi_{L,k}\} = E\{\Psi_{L,0}^T X \Psi_{L,0}\},$$

$$\begin{aligned}
& E(z_i^T X z_i) = \\
& E\{(\Psi_{L,i-1} z_{i-1} + H v_{i-1})^T X (\Psi_{L,i-1} z_{i-1} + H v_{i-1})\} = \\
& E\{z_{i-1}^T E(\Psi_{L,i-1}^T X \Psi_{L,i-1}) z_{i-1}\} + \text{tr}(X^{11} R_1) = \\
& E\{z_{i-1}^T \zeta_L^T X z_{i-1}\} + \text{tr}(X^{11} R_1) = \\
& E\{z_{i-2}^T \zeta_L^2 X z_{i-2}\} + \text{tr}[(\zeta_L^2 X)^{11} R_1] + \text{tr}(X^{11} R_1) = \\
& z_0^T \zeta_L^i X z_0 + \sum_{j=0}^i \text{tr}[(\zeta_L^j X)^{11} R_1].
\end{aligned}$$

引理得证.

引理 3 设有方程 $X = \mu X + B$, 其中 $\mu \in \kappa^n$ 且是单调的, $B > 0$. 若 μ 稳定则方程必存在解 $X > 0$.

证 定义 $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i B$, 则由文献[9]知若 μ 稳定, 则 X 肯定存在, 且当 $\mu \in \kappa^n$ 并是单调的, 则当 $X \geq 0$ 必有 $\mu X \geq 0$. 因为 $B > 0$, 则由 X 的定义式显然有 $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i B = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i B + B > 0$, 而且

$$X - \mu X = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i B - \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i B = B.$$

因此 $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i B$ 就是方程 $X = \mu X + B$ 的一个解且 $X > 0$. 引理得证.

引理 4^[9] 对于式(15)所定义的线性变换 ζ_L , ξ_L, ξ_* : $M^{n+km} \rightarrow M^{n+km}$, 有以下关系成立:

- 1) $0 \leq \xi_*^n X \leq \xi_L^n X, \forall L, \forall X \geq 0, \forall n$;
- 2) ζ, ξ, ξ_* 全是单调的, $\forall n$.

定义 1 网络控制系统(10)称为均方稳定的, 若对于所有的 z_0 都有 $\lim_{i \rightarrow \infty} E \|z_i\|^2 = 0$. 网络控制系统(10)称为均方可镇定的, 若存在反馈控制律 L_i 使得相应的闭环系统(11)均方稳定.

定理 1 若与系统(10)同维且具有相同矩阵系数的无时延系统均方可镇定, 则 $S = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_*^N \theta$ 存在, 且 S 是方程 $S = \xi_*^N S$ 的最小正定解.

证 与系统(10)同维且具有相同矩阵系数的无时延系统均方可镇定, 即系统

$$\begin{cases} z_{k+1}^* = \Phi_k z_k^* + \Gamma_k u_k + H v_k, \\ y_k = C_0 z_k^* + w_k \end{cases} \quad (16)$$

均方可镇定, 由定义 1 可知 $\lim_{i \rightarrow \infty} E \|z_i^*\|^2 = 0$, 由引理 2 可知

$$E(z_i^{*T} z_i^*) = z_0^{*T} \zeta_L^i I z_0^* + \sum_{j=0}^i \text{tr}[(\zeta_L^j I)^{11} R_1].$$

因 $\zeta_L^j I \geq 0$, 故 $(\zeta_L^j I)^{11} \geq 0$. 又因 $R_1 \geq 0$, 所以 $z_0^{*T} \zeta_L^i I z_0^* \geq 0$ 且 $\sum_{j=0}^i \text{tr}[(\zeta_L^j I)^{11} R_1] \geq 0$, 故 $\lim_{i \rightarrow \infty} E \|z_i^*\|^2 = 0 \Rightarrow$

$\lim_{i \rightarrow \infty} z_0^{*T} \zeta_L^i I z_0^* = 0, \forall z_0^*$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty} \text{tr}[(\zeta_L^j I)^{11} R_1] = 0$, 由 $\lim_{i \rightarrow \infty} z_0^{*T} \zeta_L^i I z_0^* = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_L^i I = 0 \Rightarrow \zeta_L$ 稳定. 再由引理 3 可知方程 $X = \xi_L X = \zeta_L X + Q_1' + L^T Q_2' L$ 有一解 $X > 0$, 由引理 4 可得 $X = \xi_L^N X \geq \xi_L^N \theta \geq \xi_*^N \theta$, 因此序列 $\{\xi_*^N \theta\}$ 有界. 又由引理 4 知 $\xi_* \theta > \theta, \xi_*^N$ 单调, 有 $\xi_*^{N+1} \theta = \xi_*^N \xi_* \theta \geq \xi_*^N \theta$, 所以序列 $\{\xi_*^N \theta\}$ 单调递增. 即序列 $\{\xi_*^N \theta\}$ 既单调递增又有界且 $\xi_*^N \theta > \theta, \forall N$. 因此 $S = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_*^N \theta < \infty$ 且 $S > 0$. 又因为 $\xi_*^{N+1} \theta = \xi_* \xi_*^N \theta$, 等号两边取极限得 $S = \xi_* S$. 假设 $\tilde{S}$ 是方程 $S = \xi_* S$ 的另外一个正定解, 则 $\xi_*^i \theta \leq \xi_*^i \tilde{S} = \tilde{S}$, 不等式两边取极限得 $S \leq \tilde{S}$. 综上定理得证.

定理 2 若不考虑 NCS 的系统噪声且与系统(10)同维且具有相同矩阵系数的无时延系统均方可镇定, 则系统(10)无限时间的最优控制律为

$$\begin{cases} u_k = -L_s z_k, \\ L_s = (Q_2' + E\{\Gamma_k^T S \Gamma_k\})^{-1} E\{\Gamma_k^T S \Phi_k\}, \\ S = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_*^N \theta, \end{cases} \quad (17)$$

且其无限时间的最优性能指标 $J_{\infty}^* = x_0^T S^{11} x_0$.

证 由本定理的假设及定理 1 可知 $S = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_*^N \theta$ 存在, 不考虑 NCS 的系统噪声即 $R_1 = 0$. 令 $U_{\infty} = \{u_k = -L_s z_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, 用 $J_N(U_N, z_0, X)$ 表示 $Q_0' = X$ 有限时间时系统的性能指标, 则

$$J_N(U_N, z_0, \theta) =$$

$$E\left\{\sum_{k=0}^{N-1} [z_k^T Q_1' z_k + u_k^T Q_2' u_k]\right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \{z_0^T \zeta_L^k (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k) z_0\} + \sum_{j=0}^k \text{tr}[(\zeta_L^j (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k))^{11} R_1] \xrightarrow{R_1=0} \sum_{k=0}^{N-1} \{z_0^T \zeta_L^k (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k) z_0\} =$$

$$z_0^T \left[\sum_{k=0}^{N-1} \zeta_L^k (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k)\right] z_0 = z_0^T \xi_*^N \theta z_0,$$

$$J_N(U_N, z_0, S) =$$

$$E\left\{z_N^T S z_N + \sum_{k=0}^{N-1} [z_k^T Q_1' z_k + u_k^T Q_2' u_k]\right\} =$$

$$z_0^T [\zeta_L^N S + \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_L^k (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k)] z_0 +$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^k \text{tr}[(\zeta_L^j (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k))^{11} R_1] +$$

$$\sum_{j=0}^N \text{tr}[(\zeta_L^j S)^{11} R_1] \xrightarrow{R_1=0}$$

$$z_0^T [\xi_{L_s}^N S + \sum_{k=0}^{N-1} \xi_{L_s}^k (Q_1' + L_k^T Q_2' L_k)] z_0 = z_0^T \xi_{L_s}^N S z_0.$$

而 $\xi_{L_s}^N \theta \leq \xi_{L_s}^N S$, 故 $z_0^T \xi_{L_s}^N \theta z_0 \leq z_0^T \xi_{L_s}^N S z_0$, 所以 $J_N(U_N, z_0, \theta) \leq J_N(U_N, z_0, S) = z_0^T \xi_{L_s}^N S z_0 = z_0^T S z_0$, 故 $J_\infty(U_\infty, z_0) \leq z_0^T S z_0$. 另外, $z_0^T \xi_{L_s}^N \theta z_0 = J_N^*(z_0, \theta) \leq J_\infty^*(z_0) \leq J_\infty(U_\infty, z_0) \leq z_0^T S z_0$, 对该不等式两边取极限可得 $\lim_{N \rightarrow \infty} z_0^T \xi_{L_s}^N \theta z_0 = z_0^T S z_0 \leq J_\infty^*(z_0) \leq z_0^T S z_0$, 所以 $J_\infty^*(z_0) = z_0^T S z_0$, 又因为在 z_0 的定义式中, $u_{-1} = u_{-2} = \dots = u_{-h} = 0$, 所以 $J_\infty^* = x_0^T S^{11} x_0$. 定理得证.

6 长时延 NCS 的稳定性分析 (Stability analysis of NCS with long delay)

定义 2^[8] 对于任意初态 (x_0, τ^0) , NCS(3) 是均方指数稳定的, 若存在常数 $0 < \gamma < 1, \beta > 0$ 使得对所有整数 $k \geq 0$ 有 $E(\|x_k\|^2 | x_0, \tau^0) \leq \beta \gamma^k \|x_0\|^2$.

定理 3 若不考虑网络控制系统中的系统噪声, 则式(17)所示的无限时间 NCS 的控制律可使网络控制系统(3)均方指数稳定.

证 不考虑网络控制系统中的系统噪声, 即 $R_1 = 0$. 由定理 1 可知 $S > 0$, 所以可以选取 Lyapunov 函数为 $V_k = z_k^T S z_k$, 现考察差值

$$\begin{aligned} E\{V_{k+1} | z_k, \dots, z_0\} - V_k &= \\ E\{z_{k+1}^T S z_{k+1} | z_k, \dots, z_0\} - z_k^T S z_k &= \\ z_k^T \{E[(\Phi_k - \Gamma_k L_k)^T S (\Phi_k - \Gamma_k L_k)] - S\} z_k + \\ \text{tr}(S_{k+1}^1 R_1) &= \\ z_k^T \{E[(\Phi_k - \Gamma_k L_s)^T S (\Phi_k - \Gamma_k L_s)] - S\} z_k. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} S &= \xi_{L_s}^* S = \xi_{L_s}^T S = \xi_{L_s}^T S + L_s^T Q_2' L_s + Q_1' = \\ E[(\Phi_0 - \Gamma_0 L_s)^T S (\Phi_0 - \Gamma_0 L_s)] + L_s^T Q_2' L_s + Q_1'. \end{aligned}$$

由于 $\{\Phi_i\}, \{\Gamma_i\}$ 皆为独立同分布序列, 故

$$S = E[(\Phi_k - \Gamma_k L_s)^T S (\Phi_k - \Gamma_k L_s)] + L_s^T Q_2' L_s + Q_1'.$$

令 $N_k = L_s^T Q_2' L_s + Q_1'$, 显然 $N_k > 0$, 所以

$$\begin{aligned} E\{V_{k+1} | z_k, \dots, z_0\} - V_k &= \\ - z_k^T (L_s^T Q_2' L_s + Q_1') z_k &= - z_k^T N_k z_k. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} E\{V_{k+1} | z_k, \dots, z_0\} &= V_k - z_k^T M_k z_k \leq \\ (1 - \frac{\lambda_{\min}(N_k)}{\lambda_{\max}(S_k)}) V_k &< (1 - \frac{\mu}{\sigma}) V_k = \gamma V_k. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$0 < \mu < \lambda_{\min}(M_k), \sigma > \lambda_{\max}(S_k), \mu < \sigma, 0 < \gamma < 1.$$

条件均值具有如下平滑特性:

$$\begin{aligned} E\{V_k | z_{k-2}, \dots, z_0\} &= \\ E\{E\{V_k | z_{k-1}, \dots, z_0\} | z_{k-2}, \dots, z_0\}. \end{aligned}$$

类似于式(18)可得

$$E\{V_k | z_{k-1}, \dots, z_0\} < \gamma V_{k-1}. \quad (19)$$

对式(19)取条件期望并将式(18)代入并利用平滑特性可得

$$E\{V_k | z_{k-2}, \dots, z_0\} < \gamma^2 V_{k-2}.$$

一直持续该过程, 最后得

$$E\{V_k\} < \gamma^k V_0,$$

即

$$E(z_k^T S_k z_k) < \gamma^k V_0,$$

$$E\{z_k^T z_k\} < \frac{\gamma^k}{\lambda_{\min}(S_k)} z_0^T S_0 z_0 \leq$$

$$\frac{\lambda_{\max}(S_0)}{\lambda_{\min}(S_k)} \gamma^k z_0^T z_0 = \beta \gamma^k z_0^T z_0.$$

其中 $\beta = \frac{\lambda_{\max}(S_0)}{\lambda_{\min}(S_k)} > 0$, 又因为 $u_{-1} = \dots = u_{-h} = 0$, 故 $z_0^T z_0 = x_0^T x_0$, 且 $E\{x_k^T x_k\} \leq E\{z_k^T z_k\}$, 所以有

$$E\|x_k\|^2 =$$

$$E\{x_k^T x_k\} < \beta \gamma^k z_0^T z_0 = \beta \gamma^k x_0^T x_0 = \beta \gamma^k \|x_0\|^2, \quad (20)$$

即

$$E\{\|x_k\|^2 | x_0, \tau^0\} < \beta \gamma^k \|x_0\|^2.$$

且 $\beta > 0, 0 < \gamma < 1$, 由定义 2 可知, 网络控制系统(3)均方指数稳定.

7 仿真结果 (Simulation results)

线性化后的倒立摆简化的状态方程可近似为^[10]

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = Cx = [1 \ 0] x.$$

现以此不稳定的倒立摆为对象组成一网络控制系统, 设网络诱导时滞小于两个采样周期即 $0 \leq \tau < 2T$, 当考虑了网络诱导时滞及系统噪声并进行离散化 ($T = 0.05$ s) 后可得系统的模型为

$$x_{k+1} = A_s x_k + B_0^k u_k + B_1^k u_{k-1} + B_2^k u_{k-2} + v_k,$$

$$y_k = Cx_k + w_k.$$

其中

$$A_s = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0513 \\ 1.0513 & 1.0000 \end{bmatrix}, B_0^k = \int_{t_0^k}^{t_0^{k+1}} e^{A(0.05-s)} ds B,$$

$$B_1^k = \int_{t_1^k}^{t_0^k} e^{A(0.05-s)} ds B, B_2^k = \int_{t_1^k}^{t_1^{k+1}} e^{A(0.05-s)} ds B.$$

仿真过程中各参数选择如下: $T = 0.05$ s, $Q_0 =$

$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_2 = 0.1$, $R_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$. 假设网络诱导时延在 $[0 \ 2T)$ 范围内均匀分布. 在 $x_0 = [5 \ -8]^T$ 的初值下系统的仿真结果如图 2(a), (b) 所示, 图(a)表示有限时间情况下随机最优控制律所

得到的闭环系统状态响应曲线, 图(b)表示无限时间情况下随机最优控制律所得到的闭环系统状态响应曲线. 仿真结果表明本文所设计的 NCS 的随机最优控制器是正确和有效的.

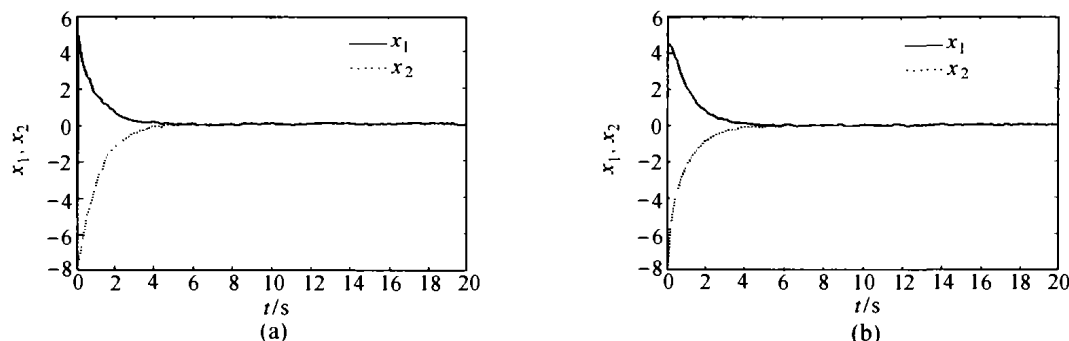


图 2 长时延网络控制系统的状态响应曲线
Fig.2 Curves of state response of NCS with long delay

8 结论(Conclusion)

本文建立了控制器为事件驱动时长时延线性网络控制系统的数学模型, 设计了无限时间情况下线性网络控制系统的随机最优控制器, 得到了相应的最优性能指标的表达式, 并证明了相应的随机最优控制器均可使网络控制系统均方指数稳定. 当被控对象为非线性系统时随机最优控制器的设计和稳定性分析有待于进一步研究.

参考文献(Refereuces):

- [1] SUK L, SANG H L, KYUNG C L. Remote fuzzy logic control for networked control systems [C]// *Proc of Annual Conf of the IEEE Industrial Electronics Society*. Denver, Colorado: IEEE Press, 2001: 1822 - 1827.
- [2] BELDIMAN O, WALSH G C. Predictors for networked control systems [C]// *Proc of American Control Conference*. Chicago, Illinois: IEEE Press, 2000: 2347 - 2351.
- [3] WALSH G C, BELDIMAN O, BUSHNELL L G. Asymptotic behavior of nonlinear networked control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1093 - 1097.
- [4] NILSSON J, BERNHARDSSON B, WITTENMARK B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57 - 64.
- [5] LIOU L W, RAY A. A stochastic regulator for integrated communication and control systems: part I - formulation of control law [J].

Trans of ASME, 1991, 46(7): 604 - 611.

- [6] NILSSON J. *Real-time control systems with delays* [D]. Lund, Sweden: Department Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998.
- [7] WEI Z, MICHAEL S B, PHILIPS S M. Stability of networked control systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(2): 84 - 99.
- [8] 朱其新, 胡寿松, 侯霞. 长时延网络控制系统的随机稳定性研究 [J]. 东南大学学报, 2003, 33(3): 368 - 371.
(ZHU Qixin, HU Shousong, HOU Xia. Research of stochastic stability of networked control systems with long delay [J]. *J of Southeast University*, 2003, 33(3): 368 - 371.)
- [9] DEKONING W L. Infinite horizon optimal control of linear discrete time systems with stochastic parameters [J]. *Automatica*, 1982, 18(4): 443 - 453.
- [10] MARTI P, VILLA R, FUERTES J M, et al. On real-time control tasks schedulability [C]// *Proc of European Control Conference*. Porto, Portugal: Springer-Verlag, 2001: 2227 - 2232.

作者简介:

朱其新 (1971 —), 男, 南京航空航天大学在读博士生, 讲师, 1997 年于西安工程科技学院工业自动化专业获硕士学位, 在国内外期刊发表论文 10 余篇, 主要研究领域为网络控制系统及非线性控制, E-mail: bob21cn@163.com;

胡寿松 (1937 —), 男, 南京航空航天大学首席教授, 博士生导师, 中国自动化学会理事, 在国内外核心期刊发表论文 150 余篇, 近期主要研究领域为故障诊断及非线性系统的自修复控制;

刘亚 (1975 —), 女, 博士, 在国内外期刊发表论文 20 余篇, 主要研究领域为非线性自修复控制, 智能控制理论及应用.